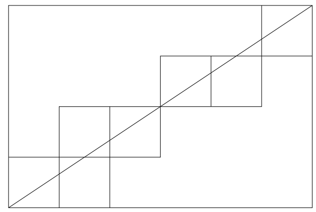
A bal alsó és a jobb felső csúcsot összekötő átló $n-1$ vízszintes és $k-1$ függőleges rácsegyenest metsz a téglalap belsejében. Pontosan akkor halad át egy, a jobb felső sarokban lévőtől különböző (rács) egységnégyzet belsején, ha annak jobb oldali függőleges vagy felső vízszintes oldalát metszi.



E metszéspontok száma összesen $(n-1)+(k-1)=n+k-2$. Azonban két ilyen metszéspont egybe is eshet; ez éppen akkor következik be, amikor az átló a téglalap belsejében lévő rácsponton halad át. Egy ilyen rácspont a téglalap bal alsó csúcsával egy $n_1\times k_1$-es rácstéglalapot határoz meg, ahol $\dfrac{n}{n_1}=\dfrac{k}{k_1}$, azaz

$$nk_1=n_1k,\quad \text{és}\quad 1\le n_1<n,\ 1\le k_1<k\ \text{ egészek.}$$

Jelölje n és k legnagyobb közös osztóját d, ekkor

$$n=dn^*,\quad k=dk^*,\quad \text{ahol } n^* \text{ és } k^* \text{ relatív prímek.}$$

A korábbi összefüggésbe helyettesítve:

$$dn^*k_1=n_1dk^*,\quad \text{azaz}\quad n^*k_1=n_1k^*.$$

Ebből következik, hogy n_1k^* osztható n^*-gal, ami a relatív prímség miatt csak akkor következik be, ha n_1 osztható n^*-gal: $n_1=xn^*$, ahol x pozitív egész, és $n^*x<n=dn^*$ miatt $1\le x<d$; emiatt $k_1=xk^*$.

A téglalap átlójára eső belső rácspontok száma tehát megegyezik x lehetséges értékeinek számával, $d-1$-gyel. Ennyi egységnégyzetet az $n+k-2$ formulában kétszer számoltunk, így – az eddig kihagyott jobb felső sarok egységnégyzetével együtt – az átló $(n+k-2)-(d-1)+1=n+k-d$ egységnégyzet belsején halad keresztül.

Feladatunk ilymódon $n+k-d=2018$ pozitív egész megoldásainak számát kérdezi, ahol $(n,k)=d$ és $n\ge k$. Mivel d az n-nek és a k-nak is osztója, azért $d\mid 2018=2\cdot 1009$. Az 1009 prím, így d szóbajövő értékei: 1, 2, 1009 és 2018.

1. Ha $d=1$, akkor az $n+k=2019=3\cdot 673$ egyenlet $(n,k)=1$, $n\ge k\ge 1$ megoldásainak számát keressük. A relatív prímség feltétele nélkül a megoldások száma 1009 lenne. Ezek közül azonban nem megfelelőek azok, amelyeknél n és k is osztható 3-mal, 673-mal vagy 2019-cel. Az ilyen megoldások száma rendre $\left[\dfrac{1009}{3}\right]=336$, $\left[\dfrac{1009}{673}\right]=1$, illetve $\left[\dfrac{1009}{2019}\right]=0$, így a valamennyi feltételnek eleget tevő megoldások száma ebben az esetben $1009-(336+1)+0=672$.

2. Ha $d=2$, akkor az $n+k=2020=2^2\cdot 5\cdot 101$ egyenlet $(n,k)=2$, $n\ge k\ge 1$ megoldásainak számát keressük. Ez nyilván ugyanannyi, mint az $x+y=1010=2\cdot 5\cdot 101$ egyenlet $(x,y)=1$, $x\ge y\ge 1$ megoldásainak a száma. Az első esetben alkalmazott számoláshoz hasonlóan ez

$$505-\left(\left[\frac{505}{2}\right]+\left[\frac{505}{5}\right]+\left[\frac{505}{101}\right]\right)+\left(\left[\frac{505}{10}\right]+\left[\frac{505}{202}\right]+\left[\frac{505}{505}\right]\right)-\left(\left[\frac{505}{1010}\right]\right)=$$
$$=505-358+53-0=200.$$

3. Ha $d=1009$, akkor az $n+k=3027=3\cdot 1009$ egyenlet $(n,k)=1009$, $n\ge k\ge 1$ megoldásainak számát keressük. Az előző esethez hasonlóan ez ugyanannyi, mint az $x+y=3$ egyenlet $(x,y)=1$, $x\ge y\ge 1$ megoldásainak a száma, ami nyilván 1.

4. Ha $d=2018$, akkor az $n+k=4036=4\cdot 1009$ egyenlet $(n,k)=2018$, $n\ge k\ge 1$ megoldásainak számát keressük, ami 1, hiszen csak $n=k=2018$ felel meg.

A négy esetet összegezve, a feladatnak eleget tevő számpárok száma $672+200+1+1=874$.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.)
megoldását felhasználva

Megjegyzés. Ha az $m\ge 2$ egész prímtényezős alakja $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$, akkor bármely m darab egymást követő egész szám közül az m-hez relatív prímek száma $\varphi(m)=p_1^{a_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{a_2-1}(p_2-1)\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k-1}(p_k-1)$. (Ezt a megoldásban is többször használt szita formula segítségével (is) bizonyíthatjuk.) A fenti megoldásban mind a négy esetben egy $x+y=m$ típusú egyenlet olyan egész megoldásainak számát kerestük, ahol $(x,y)=1$ és $x\ge y\ge 1$. Itt $1\le y\le\left[\dfrac{m}{2}\right]$, és az $(x,y)=1$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $(y,m)=1$. Ennek figyelembevételével több megoldó is a $\varphi(m)$ képletének alkalmazásával ért célba.