Janzer Orsolya Lili megoldása.

Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög.

Mivel egy ilyen, 2018 soros háromszögnek éppen $1+2+3+\ldots+2018$ mezője van, minden egésznek 1-től $1+2+3+\ldots+2018$-ig pontosan egyszer kellene szerepelnie benne.

Legyen az n-edik sorban M_n a legnagyobb, m_n pedig a legkisebb szám. Most tegyük fel, hogy $n \le 2017$, és vegyük a közvetlenül M_n alatt lévő számokat. Legyenek ezek a számok a és b. Feltehető, hogy ezek közül $a > b$. Így $a-b = M_n$. Mivel $a \le M_{n+1}$ és $b \ge m_{n+1}$, kapjuk, hogy $M_{n+1} \ge M_n + m_{n+1}$ ($\ge M_{n-1} + m_n + m_{n+1} \ge \ldots$).

Így minden $1 \le i < j \le 2018$-ra

$$M_j \ge M_i + \sum_{k=i+1}^{j} m_k.$$

Ebből, mivel $M_1 = m_1$,

$$M_{2018} \ge \sum_{k=1}^{2018} m_k.$$

Tehát M_{2018} felírható 2018 különböző pozitív egész összegeként, így $M_{2018} \ge 1+2+3+\ldots+2018$, ezért $M_{2018} = 1+2+3\ldots+2018$, és $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ egy permutációja az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számoknak. Következik továbbá, hogy minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz minden $1 \le j \le 2018$ esetén

$$M_j = \sum_{k=1}^{j} m_k.$$

Most legyen minden $n \le 2018$ szám „kicsi”, továbbá minden $1+2+\ldots+2017 \le \le n \le 1+2+\ldots+2018$ szám „nagy”. Mivel $\{m_1, m_2, \ldots, m_{2018}\}$ az $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ számok permutációja, minden sorban pontosan egy kicsi szám lesz.

Ha $n \le 1954$, akkor:

$$\begin{aligned} M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k &\le 2018 + 2017 + \ldots + 65 = \\ &= (1+2+\ldots+2018) - (1+2+\ldots+64) = \\ &= (1+2+\ldots+2018) - 2080 < 1+2+\ldots+2017, \end{aligned}$$

vagyis az n-edik sorban nem lehet egyetlen „nagy” szám sem.

Ha $1955 \le n \le 2017$, akkor legyen l egy nagy szám az n-edik sorban. Legyenek a számok közvetlenül l alatt a és b; feltehető, hogy $a > b$. Így $b = a - l$, és $a \le \le 1+2+\ldots+2018$; mivel l „nagy” ($\Rightarrow l \ge 1+2+\ldots+2017$), $b \le 2018$, vagyis b kicsi. Így $b = m_{n+1}$, azaz l közvetlenül m_{n+1} fölött van. Így legfeljebb kettő „nagy” szám lehet az n-edik sorban.

Tehát legfeljebb 126 nagy szám van a sorokban összesen, a legalsót kivéve. Mivel összesen 2019 „nagy” szám van, legalább 1893 „nagy” szám van a legalsó sorban, ezért legfeljebb 125 „nem-nagy” van abban a sorban. A legalsó sorban 2018 szám, így 2017 szomszédos számpár van. Ha figyelmen kívül hagyjuk a közvetlenül az m_{2017} alatti számpárt, és a legfeljebb 250 számpárt, amiben van „nem-nagy”, akkor még mindig marad olyan szomszédos pár, aminek minkét tagja „nagy”, és nem közvetlenül az m_{2017} alatt van. Viszont a két „nagy” szám különbsége kicsi, és megtalálható a 2017-edik sorban, így az m_{2017}-tel együtt már kettő „kicsi” szám is lenne abban a sorban, ami ellentmondás.

Tehát nem létezik ilyen anti-Pascal háromszög.

A megoldás forrása: `https://artofproblemsolving.com`.