Bukva Balázs megoldása.

Ha $3 \mid n$, akkor van megoldás, méghozzá legyen

$$a_n = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1 & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhető, hogy jó lesz.

Más esetben nincsen megoldás. Tekintsük az alábbi átrendezést ($a_{n+3} := a_3$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_{i+1}a_{i+2}+1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i a_{i+1}+1) a_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i+2}^2.$$

Ebből a rendezési egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy $a_{i+3} = a_i$ minden i-re, így, ha $(n,3) = 1$, akkor az összes a_i egyenlő, azaz $a_i = a$ valamilyen a-ra. De ebből az következne, hogy az $x^2 + 1 = x$ egyenletnek a egy valós megoldása, de ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Ezzel beláttuk, hogy ha $(n,\ 3) = 1$, akkor nincs megoldás.