I. megoldás. Jelöljük a nagy kör középpontját O-val, az a pontja pedig, amelyiket a kerék kijelölt kerületi pontja (M) valamikor (a kezdőhelyzetnek tekintett pillanatban) elért, legyen A. Megmutatjuk, hogy az M pont az OA sugárhoz tartozó átmérőn mozog oda-vissza.

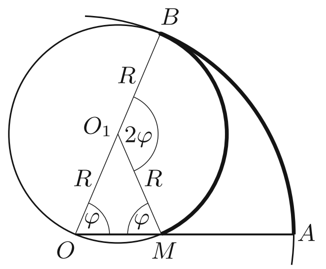
Ha a kis kerék középpontja a kezdőhelyzethez képest φ szöggel elfordul a nagy kör középpontja körül, a két kör érintési pontja B-be kerül (*1. ábra*). A kis kör és az OM egyenes metszéspontja az egyenlő szárú OO_1M háromszöget jelöli ki, amelynek O_1-nél levő külső szöge 2φ. Így a BM körív hossza megegyezik a BA körív hosszával, hiszen a sugarak aránya $1:2$. Az M pont tehát megfelel a csúszásmentes gördülés feltételének, vagyis tekinthető a kis kerék kezdetben A-ban levő kerületi pontjának a kerék elfordulása utáni helyzetben.

Megjegyzés. Ha a gördülés egyenletes, vagyis $\varphi = \omega t$, akkor

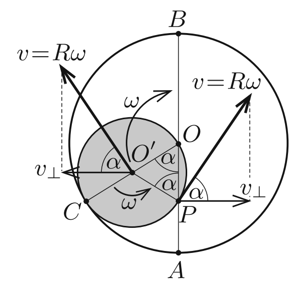
$$OM = 2R\cos\varphi = 2R\cos\omega t,$$

tehát M mozgása $2R$ amplitúdójú, a kerék gördülésével azonos periódusidejű *harmonikus rezgőmozgás.*

Markó Péter (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Tekintsük az R sugarú gördülő kerék tetszőleges helyzetét (*2. ábra*). A kerék kerületének kiszemelt P pontja és a nagy kör O középpontja kijelöli a $2R$ sugarú kör AB átmérőjét. Megmutatjuk, hogy a kerék gördülése során a P pont nem távolodik el az AB egyenestől, mindvégig rajta marad azon.

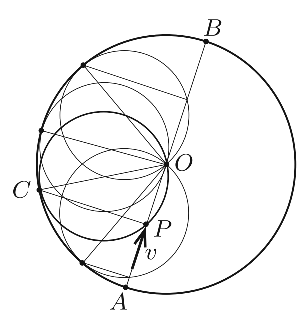
A kerék mozgása két részből tehető össze. Egyrészt az O' középpontja valamekkora ω szögsebességgel elfordul a nagy kör O középpontja körül; ebből a mozgásból származó sebessége $v = R\omega$. Másrészt a kerék ugyancsak ω szögsebességgel, de az ellenkező irányban forog a saját (O') középpontja körül; a kerületi pontjainak, így P-nek is az ebből származó sebessége $R\omega$.

Megjegyzés. A kétféle mozgás szögsebességének egyenlő nagyságát jól mutatja az tény, hogy a kerék C pontjának eredő sebessége – a csúszásmentes gördülés miatt – *nulla.* A kerék C pontja (ami tényleges anyagi pont) nem tévesztendő össze a kerék és a nagy kör pillanatnyi érintkezési pontjával, amit mindig más és más anyagdarabkák jelölnek ki, és amelyik pont nem is mozdulatlan, hanem $\omega' = \omega/2$ szögsebességgel „jár körbe" az O pont körül.

A kétféle mozgásból adódó sebességvektor nagysága és az AB átmérővel bezárt szöge ugyanakkora, emiatt az AB-re merőleges $v_\perp$ sebességkomponensek is egyenlő nagyságúak (de ellentétes irányúak). Ezek szerint a P pont nem távolodik el az AB egyenestől, a kerék gördülése során mindvégig azon marad.

Tallósy Péter (Szeged, Dugonics András Piarista Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Tekintsük a gördülő kerék valamelyik (a *3. ábrán* vastagabban jelölt) helyzetét! A mozgás pillanatnyi forgási középpontja (ún. momentán centruma) a két kör érintkezési pontja, vagyis C, hiszen ezen pont sebessége nulla. A kerék kijelölt kerületi pontjának (P) sebessége merőleges CP-re, tehát átmegy a nagy kör O középpontján, hiszen a kis kerék határvonala az COP háromszög Thalész-köre. Ezek szerint a P pont sebessége mindvégig az O középpont felé, vagy azzal ellentétes irányba mutat, a P pont pályája tehát a nagy kör egyik átmérője.



3. ábra

(G. P.)

Megjegyzés. Amikor egy R_1 sugarú kör kerületének belső oldalán csúszásmentesen gördül körbe egy másik, $R_2 < R_1$ sugarú kör, akkor a belső kör egy pontja által leírt pályát *hipocikloisnak* nevezzük, aminek a pontjait – alkalmasan választott koordinátarendszerben – a következőképpen számíthatjuk ki:

$$x(t) = (R_1 - R_2)\cos t + R_1 \cos\frac{(R_1 - R_2)t}{R_2},$$
$$y(t) = (R_1 - R_2)\sin t - R_1 \sin\frac{(R_1 - R_2)t}{R_2}.$$

Amennyiben $R_1 = 2R$ és $R_2 = R$, a hipociklois elfajult lesz, $y(t) \equiv 0$ egyenletű egyenessé válik.

Bányai Kristóf (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 9. évf.)