Írjuk rá minden ágra (és a törzsre), hogy hány gyermeke van. Legyen X egy ág (vagy a törzs), aminek x gyereke van. Legyen y az X gyermekeire írt számok maximuma. Legyen z az X gyermekein nem szereplő, y-nál kisebb pozitív egész számok maximuma. A z biztosan létezik, mert az 1 nem szerepelhet az ágakon. Ekkor a $z+1$ szerepel X valamelyik gyerekén. Ha $z>1$, akkor $z+1>2$, ezért a z szerepel X valamelyik gyermekén. Ez ellentmondás, ezért $z=1$. Így a $2,\ 3,\ \ldots\ ,\ y$ mind szerepelnek X gyermekein. A testvéreknek különböző számú gyermeke van, ezért ezekből pontosan egy van. Így X gyermekeinek a száma $y-1$, tehát $y=x+1$. Tehát az X gyermekeire írt számok a $2,\ 3,\ \ldots\ ,\ x+1$.

Vegyünk fel az ágak között egy irányított gráfot, ahol kétféle él van: az egyik fajta egy „függőleges” él, amely egy x feliratú ágtól az $x+1$ feliratú gyermekéhez vezet, a másik fajta egy „vízszintes” él, amely egy x feliratú ágtól az $x-1$ feliratú testvéréhez vezet, ha $x>2$. Látható, hogy a gráfban minden ághoz pontosan egyféleképpen lehet eljutni a fa törzsétől, mert egy ágtól az összes gyermekéhez pontosan egyféleképpen lehet eljutni. Az összes ágtól pontosan egy függőleges és pontosan egy vízszintes él indul, kivéve a 2-es ágakat, ahonnan csak függőleges él indul.

Az n láb magasan induló ágak száma megegyezik az $n+1$ láb magasan induló 2-es ágak számával, mert minden ágnak pontosan egy 2-es gyermeke van. Válasszunk ki egy $n+1$ láb magasan induló 2-es X ágat. X-hez létezik pontosan egy útvonal a gráfban, ami a fa törzsétől indul. Nevezzük a $+$ és $-$ jelekből álló véges sorozatokat $(+/-)$ sorozatnak. Az útvonalat leírhatjuk egy $(+/-)$ sorozattal, ahol a $+$ függőleges élet jelent, a $-$ pedig vízszintes élet. Az így kapott $(+/-)$-sorozat egyértelműen meghatározza X-et. Látható, hogy egy $+$ esetén eggyel nő a jelenlegi ágra írt szám, és a $-$ esetén eggyel csökken, ahogy a sorozat alapján haladunk a gráfban. Az útvonal első és utolsó ágán is a 2 szerepel, ezért a $+$-ok és $-$-ok száma megegyezik. Az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat $n+1$ darab $+$ jelet tartalmaz, mert a függőleges élekkel egy lábbal nő a magasság, a vízszintes éleknél nem változik. Így a $-$-ok száma is $n+1$. Nevezzünk egy $n+1$ darab $+$ jelet és $n+1$ darab $-$ jelet tartalmazó $(+/-)$ sorozatot *jónak,* ha az első i tagja között legalább annyi $+$ van, mint $-$ mindegyik i-re. Az útvonal összes ágán a szám legalább 2, és az első ágon a szám 2, ebből könnyen látható, hogy az X-hez tartozó $(+/-)$ sorozat jó. Az is látható, hogy ha a $(+/-)$ sorozat *jó,* akkor nem fordulhat elő, hogy egy 2-es ágról egy vízszintes élen próbálunk továbblépni. Így a *jó* $(+/-)$ sorozatok száma megegyezik az n láb magasan induló ágak számával.

A *jó* sorozatokat úgy számolhatjuk meg, hogy az összes $n+1$ darab $+$-t és $n+1$ darab $-$-t tartalmazó $(+/-)$ sorozat számából levonjuk a nem jó sorozatok számát. Az összes ilyen sorozat száma $\binom{2n+2}{n+1}$. Vegyünk egy olyan sorozatot, ami nem jó. Van olyan minimális i, amelyre teljesül, hogy az első i tag között több $-$ van, mint $+$. A minimalitás miatt az első $i-1$ között között legfeljebb annyi $-$ van, mint $+$. Ez csak úgy lehet, ha az első $i-1$ tag között ugyanannyi $+$ van, mint $-$, és az i-edik tag $-$. Változtassuk meg az i-edik tag utáni összes tagot, ezt nevezzük *módosított* sorozatnak. Ha az i-edik tagot is megváltotatnánk, akkor nyilván nem változna meg a $+$-ok és $-$-ok száma (mert egyenlőek). Így a módosított sorozatban n darab $+$ van, és $n+2$ darab $-$. Látható, hogy egy n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozat esetén is van olyan i, amire az első i elem között több $-$ van, mint $+$ (mert az egész sorozatban is több van). Vegyük észre, hogy ha a minimális i-edik tag után megváltoztatjuk az összes tagot, akkor visszakapjuk az eredeti sorozatot. Így a nem jó sorozatok száma megegyezik az n darab $+$-t és $n+2$ darab $-$-t tartalmazó sorozatok számával, ami $\binom{2n+2}{n}$.

Tehát az ágak száma: $\binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n+2}{n}$, ami az $(n+1)$-edik Catalan-szám.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A helyes megoldást adó versenyzők többsége valamilyen ismert problémára visszavezetve eljutott oda, hogy az n láb magasan kiinduló ágak száma az $(n+1)$-edik Catalan-szám. Ezután ennek a kiszámítását már nem részletezte.