Mivel a számok átlaga 1, ezért az összegük 2017. A számok nemnegatívak, és van köztük pozitív is, ezért az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés értelmes, hiszen mindegyik nevezőben legalább egy pozitív összeadandó szerepel, és így valamennyi nevező pozitív.

Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összegben mind a 2017 összeadandó legfeljebb $\frac{1}{2017}$. Az összeg szimmetriája miatt elegendő igazolni, hogy

$$\frac{a_1}{a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}} \le \frac{1}{2017}.$$

Szorozva a pozitív nevezőkkel:

$$2017a_1 \le a_1^{2018}+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}.$$

Mindkét oldalhoz a_1-et adva, és felhasználva, hogy $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2017}=2017$ adódik:

$$2018a_1 \le a_1^{2018}+2017.$$

Osztva 2018-cal és a 2017-et szétbontva 2017 darab 1 összegére:

$$a_1 \le \frac{a_1^{2018}+1+1+\ldots+1}{2018}.$$

Ez pedig a nemnegatív számok számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenség miatt teljesül, hiszen az egyenlőtlenség bal oldalán az $a_1^{2018}, 1, 1, \ldots, 1$ számok (összesen 2018-tagú) mértani közepe, míg a jobb oldalon ugyanezen számok számtani közepe áll. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1=1$.

Ezzel igazoltuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valamennyi törtje nem nagyobb, mint $\frac{1}{2017}$, és így a teljes összeg nem nagyobb, mint 1. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha valamennyi a_i megegyezik 1-gyel.

Megjegyzés. A $2018a_1 \le a_1^{2018}+2017$ egyenlőtlenséget változatos módon bizonyították a feladatbeküldők. Ezekből mutatunk be kettőt.

1. Az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$2017(a_1-1) \le a_1^{2018}-a_1 = a_1\left(a_1^{2017}-1\right) = a_1(a_1-1)\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

egyenlőtlenséggel. Itt, ha $a_1=1$, akkor nyilván az egyenlőség igaz, különben osszunk a nem nulla (a_1-1)-gyel.

Ha $a_1>1$ (nem változik az egyenlőtlenség iránya), akkor

$$2017 \le a_1\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

nyilván teljesül, hiszen a jobb oldalon egy 1-nél nagyobb, és egy 2017-nél nagyobb szám szorzata áll (ugyanis a jobb oldali zárójelben álló 2017 tag közül 2016 nagyobb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

Ha viszont $a_1<1$ (a negatív (a_1-1)-gyel osztva megváltozik az egyenlőtlenség iránya), akkor pedig a

$$2017 \ge a_1\left(a_1^{2016}+a_1^{2015}+\ldots+a_1+1\right)$$

teljesül nyilván, mert ekkor a jobb oldalon egy 1-nél kisebb, és egy 2017-nél kisebb szám szorzata áll (hiszen most a jobb oldalon lévő zárójelben lévő 2017 tag közül 2016 kisebb, mint 1, az utolsó pedig pontosan 1).

2. Használjuk a következő, ún. Bernoulli-egyenlőtlenséget: Bármely valós $a \ge -1$ és $n \in \mathbb{N}$ számok esetén teljesül:

$$(1+a)^n \ge 1+n\cdot a.$$

Az a_1-et $(1+a)$-nak (ekkor az a_i-k nemnegativitásából következik $a \ge -1$), valamint n-et 2018-nak választva kapjuk, hogy $a_1^{2018} \ge 1+2018(a_1-1) = 2018a_1-2017$, ami – 2017-et adva mindkét oldalhoz – éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.