I. megoldás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha k természetes szám és n pozitív egész szám, akkor igaz az állítás.

Alkalmazzunk k-ra vonatkozó teljes indukciót. Tegyük fel, hogy minden természetes számra igaz az állítás k-ig, be kell látnunk, hogy $k+1$-re is igaz.

Ha a számok $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$, akkor az indukciós feltevés alapján az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k}$ számok közül kiválasztható $x \geq k+1$ darab, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha $x \geq k+2$, akkor az állítás igaz, ugyanezt a legalább $(k+1)+1$ darab számot ki tudjuk választani az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+k+1}$ számok közül is. Ha $x = k+1$, akkor vegyük ki a számhalmazból ezt a $k+1$ darab számot, az így megmaradó $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok közül, az indukciós feltevés miatt, szintén ki lehet választani legalább $0+1=1$ számot, úgy hogy az összegük n-nel osztható. Ezt a néhány számot és az előbb kivett $k+1$ számot összeadva szintén n-nel osztható lesz az összeg, ezért kiválasztható legalább $k+2$ darab szám.

A befejezéshez már csak azt kell igazolnunk, hogy $k=0$-ra is igaz az állítás, azaz n darab szám közül kiválasztható legalább 1 darab úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ha a számok között van olyan, amelyik osztható n-nel, akkor vegyük ezt a számot.

Ha nincs közöttük n-nel osztható, akkor a számokat $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel jelölve tekintsük az alábbi összegek n-es maradékait:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1,\\
S_2 &= a_1 + a_2,\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3,\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n.
\end{aligned}$$

Mivel mindegyik egész szám, és n-nel osztva az egész számok n-féle maradékot adhatnak, a skatulya elv miatt vagy van közöttük 0 maradékot adó, vagy van legalább két azonos maradékot adó összeg. Ha előfordul a 0 maradék, akkor találtunk néhány számot, amelyeknek az összege osztható n-nel. Ha pedig van legalább két azonos maradékú összeg, S_i és S_j $(i > j)$, akkor $S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i$ osztható n-nel, ezért szintén találtunk közöttük olyan számokat, amelyeknek az összege osztható n-nel.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Felhasználjuk azt az ismert, és az előző megoldásban is bizonyított tényt, hogy n egész szám közül mindig kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük osztható n-nel.

Ennek ismeretében eljárást adunk a megfelelő legalább $(k+1)$ darab egész szám megtalálására.

Válasszunk ki az $n+k$ darab egész közül n számot. Ebből az n darab egész számból azt a néhányat, amelynek összege osztható n-nel, félretesszük. Ezután a megmaradó számok közül ismét kiválasztunk n darabot. Ezek közül is félretesszük azokat, amelyek összege osztható n-nel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg csak lehetséges, vagyis amint az eljárás véget ér, legfeljebb $n-1$ számot nem raktunk félre. A félretett számok száma tehát legalább $(k+1)$ és olyan csoportokban tettük félre, hogy mindegyik csoport összege osztható n-nel, tehát az összesnek az összege is az n többszöröse. Ezzel az állítást igazoltuk.

Szabó Blanka (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján