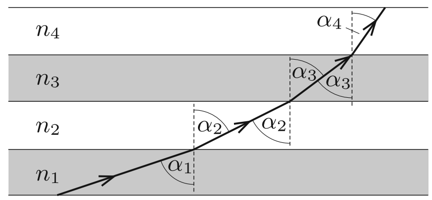
I. megoldás. Ha képzeletben vékony, egyre növekvő törésmutatójú átlátszó plánparalel (két párhuzamos síkkal határolt) lemezeket helyezünk egymásra, és rajtuk keresztül egy vékony fénysugár halad (*1. ábra*), akkor a Snelius–Descartes-törvény szerint

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\frac{n_1}{n_2},\qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_3},\qquad \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_3}=\frac{n_3}{n_4}\ldots,$$

azaz

$$n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2=n_3\sin\alpha_3=\ldots=\text{állandó}, \tag{1}$$

tehát a beesési szög szinusza és az abszolút törésmutató szorzata a helytől függetlenül állandó. A folyamatosan változó törésmutatójú közegre is érvényes ez az összefüggés, hiszen a közeget tekinthetjük úgy, mintha vékony plánparalel lemezekből épülne fel.

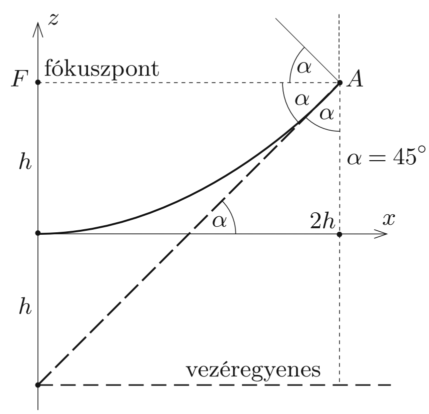


1. ábra

Helyezzük a koordináta-rendszer origóját a fénysugár kiindulási pontjához. A feladat szövege szerint a z tengely irányára merőlegesen, az x tengely irányában indítjuk a vékony fénysugarat (*2. ábra*). Az origóban (a parabola csúcspontjában) a beesési szög 90°-os, így az (1)-ben szereplő állandó n_0. A törésmutató egy tetszőleges z koordinátával megadott P pontban

$$n(z)=\frac{n_0}{\sin\alpha(z)},$$

ahol $\alpha(z)$ a parabola P pontbeli érintőjének a z tengellyel bezárt szöge (vagyis az elgörbülő fénysugár ottani „beesési szöge"). Azt is tudjuk, hogy $z=h$-nál a törésmutató $\sqrt{2}n_0$, vagyis ezen a helyen $\sin\alpha(h)=1/\sqrt{2}$, tehát $\alpha(h)=45°$.

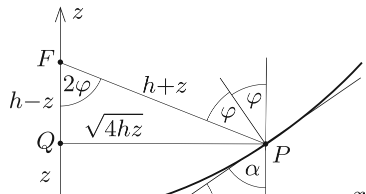


2. ábra

A parabola ismert tulajdonsága, hogy az érintője felezi azt a szöget, amelyet az érintési pontból a vezéregyenesre emelt merőleges és az érintési pontból a fókusz felé indított félegyenes bezár (lásd pl. *Reiman István Matematika,* Typotex (2014), `https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_reimann_matematika/ch17s04.html`). (A parabola ezen tulajdonsága tesz lehetővé számos műszaki alkalmazást, pl. a parabolatükrök, fényszórók és antennák működését.)

Alkalmazzuk az érintő irányára vonatkozó ismeretet a parabola $z=h$ „magasan" lévő A pontjára, ebből megkapjuk, hogy az F fókuszpont, valamint a vezéregyenes a csúcsponttól h távolságra van, és a parabola egyenlete:

$$z(x)=\frac{x^2}{4h},\qquad \text{azaz}\qquad x(z)=\sqrt{4hz}\,. \tag{2}$$



3. ábra

Határozzuk meg a fénysugár parabola pályájának tetszőleges P pontjában az érintő és az x tengely $\varphi = 90^\circ - \alpha$ szögét (*3. ábra*), majd annak ismeretében olvassuk le a törésmutató $n(z)$ függvényének alakját. A P pont az x tengelytől z, a vezéregyenestól $h + z$ távol van, így a fókuszponttól mért távolsága is $h + z$. Másrészt $FQ = h - z$, tehát

$$\cos(2\varphi) = \frac{h-z}{h+z}, \quad \text{így} \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} = \sqrt{\frac{h}{h+z}}\,,$$

a keresett törésmutató pedig

$$n(z) = \frac{n_0}{\sin\alpha(z)} = \frac{n_0}{\cos\varphi(z)} = n_0\sqrt{1+\frac{z}{h}}\,.$$

Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A fény terjedését változó törésmutatójú közegben nemcsak a sok-sok vékony rétegre felírt Snelius–Descartes-törvénnyel, hanem a *Fermat-elv* segítségével is le lehet írni. Ez utóbbi azt állítja, hogy helyről helyre változó $n(\boldsymbol{r})$ törésmutató esetén egy vékony fénysugár „mozgása” olyan pálya mentén megy végbe, amelyre az adott kezdő- és végpont közötti terjedés ideje, vagyis a

$$T = \frac{1}{c}\int n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

integrál értéke a lehető legkisebb. (Az integrálás a pályagörbe s-sel jelölt ívhossza szerint történik.)

A szokásos kérdésfeltevés az, hogy adott módon változó törésmutatóhoz milyen „fénypályagörbe” tartozik. Jelen esetben azonban a megfordított kérdésre keressük a választ: Milyen módon változó törésmutató eredményez egy megadott pálya (parabolaív) mentén történő fényterjedést?

Hasonló minimumelv a klasszikus mechanikai mozgásokra is megfogalmazható (lásd pl. Solt György: *Variációs elvek a klasszikus és kvantumfizikában* c. cikket lapunk 490. oldalán. – a Szerk.). A Maupertuis-elv szerint egy adott összenergiájú, pontszerű test a tér két adott pontja között olyan pályán mozog, amelyre a

$$W = \int v(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s$$

integrál minimális, ahol $v(\boldsymbol{r})$ a test sebességének – általában helyről helyre változó – nagysága. Ebben az esetben is az a szokásos kérdés, hogy adott módon változó (például az energiamegmaradás tételéből kiszámítható) sebességnagyság esetén milyen a pályagörbe alakja, de itt is feltehető a megfordított kérdés: Milyen módon változzon a test sebességének nagysága, hogy a mozgás pályagörbéje adott alakú (mondjuk parabolaív) legyen? Természetes módon kínálkozik az a gondolat, hogy a Fermat-elv és a Maupertuis-elv közötti hasonlóságot kihasználjuk. Ha ismerjük az egyik (a mechanikai) probléma megoldását, abból következtethetünk a másik (az optikai) feladat megoldására. Jelen esetben az x tengely mentén elinduló és csak a z koordinátától függő $n(z)$ törésmutatójú közegben haladó fénysugárnak egy olyan mechanikai mozgás felel meg, amelyben a kezdősebesség (egy alkalmasan választott koordináta-rendszerben) vízszintes irányú, és a sebesség nagysága csak a másik koordinátától (z-től) függ (tehát a test függőleges irányú erőtérben mozog). Tudjuk, hogy a mozgás pályagörbéje akkor lesz parabola, ha az erőtér homogén, vagyis a vízszintes hajítás jól ismert esetével van dolgunk.

Egy v_0 kezdősebességgel eldobott test sebességének nagysága (függőlegesen lefelé irányított z tengely mellett) $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$. Az analóg optikai feladat megoldása eszerint $n(z) = c_1\sqrt{1+c_2 z}$, ahol c_1 és c_2 alkalmasan választott állandók. Mivel ismerjük, hogy $n(0) = n_0$ és $n(h) = \sqrt{2}n_0$, ezekből $c_1 = n_0$ és $c_2 = 1/h$ következik, vagyis a törésmutató z-függése:

$$n(z) = n_0\sqrt{1+\frac{z}{h}}\,.$$

Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján