a) A kettőscsillag kialakulása során, mivel a rendszerre külső erő nem hat, és anyag sem távozik belőle, annak tömegközéppontja mindvégig nyugalomban van az alkalmasan választott koordináta-rendszer origójában, továbbá a rendszernek a tömegközéppontra vonatkoztatott perdülete (N) is időben állandó.

Legyen a két csillag távolsága r, a tömegközépponttól mért távolságuk pedig r_1 és r_2. Jelölje továbbá $\omega = 2\pi/T_{\text{csillag}}$ a csillagrendszer keringésének szögsebességét. Ekkor fennállnak az

$$r_1 = r\frac{m_2}{M}, \qquad r_2 = r\frac{m_1}{M}, \tag{1}$$

$$N = r_1 m_1(r_1\omega) + r_2 m_2(r_2\omega) = \frac{m_1 m_2}{M} r^2 \omega \tag{2}$$

összefüggések.

A csillagok a tömegközéppont körüli körpályán keringenek. Az egyik (például az m_1 tömegű) csillag mozgásegyenlete:

$$\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 r_1 \omega^2 = \frac{m_1 m_2}{M} r\omega^2, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma M = r^3\omega^2. \tag{3}$$

(Ugyanerre az összefüggésre vezet a másik csillag mozgásegyenlete is.)

A (2) és (3) egyenletekből r kiküszöbölésével a szögsebesség

$$\omega = \frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{MN^3} \le \frac{\gamma^2 M^5}{64\, N^3}. \tag{4}$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó

$$\sqrt{m_1 m_2} \le \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{M}{2}$$

egyenlőtlenséget.

A kettőscsillag-rendszer keringési ideje tehát

$$T_{\text{csillag}} = 2\pi \frac{MN^3}{\gamma^2 (m_1 m_2)^3} \ge 128\pi \frac{N^3}{\gamma^2 M^5}.$$

Látható, hogy a két csillag keringési ideje nem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A leggyorsabb keringés a szimmetrikus tömegeloszlásnak, az $m_1 = m_2 = M/2$ esetnek felel meg.

b) A (2) és (3) összefüggésekből az ω szögsebességet kiküszöbölve a csillagok távolságára

$$r = \frac{N^2 M}{\gamma (m_1 m_2)^2} \ge 16 \frac{N^2}{\gamma M^3} \tag{5}$$

adódik. (Ismét felhasználtuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.)

A két csillag távolsága sem sem lehet egy bizonyos értéknél kisebb. A legkisebb csillagtávolság a szimmetrikus tömegeloszláshoz tartozik.

c) Írjuk fel az m_1 tömegű csillag sugár irányú (radiális) mozgásegyenletét, amikor a tömegközépponttól mért távolsága r_1, az r_1-nek megfelelő „gyorsulás" a_1, a szögsebessége pedig ω:

$$m_1 a_1 - m_1 r_1 \omega^2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{6}$$

Itt most r_1, r és ω időben változó mennyiségek.

Megjegyzés. (6) bal oldalának második tagja azt fejezi ki, hogy a polárkoordináta-rendszerben a sugár irányú gyorsulás nem egyszerűen $a(t)$, ami az $r(t)$ távolság változási sebességének „változási üteme" (második deriváltja), hanem $a_1(t) - r_1\omega^2$. A $-(m_1 r_1 \omega^2)$-es kifejezést (6) jobb oldalára rendezve az a tag úgy is értelmezhető, mint az ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben fellépő „centrifugális erő".

Felhasználva az (1) és (2) összefüggéseket (6) tovább alakítható:

$$\frac{m_1 m_2}{M} a(t) - \frac{m_1 m_2}{M} \left(\frac{MN}{m_1 m_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r(t)^3} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r(t)^2}, \tag{6'}$$

ahol $a(r)$ az $r(t)$ távolságnak megfelelő „gyorsulás". Mivel $r(t)$ csak kis amplitúdóval ingadozik az (5)-nek megfelelő egyensúlyi

$$r_0 = \frac{N^2 M}{\gamma (m_1 m_2)^2}$$

érték körül, kereshetjük a megoldást $r(t) = r_0 + x(t)$ alakban, ahol $x(t) \ll r_0$. Behelyettesítve ezt az alakot $(6')$-be és x/r_0 elsőnél magasabb hatványait elhanyagolva, vagyis csak elsőrendben számolva a körpálya körüli ingadozásokat, a $(6')$ mozgásegyenlet így alakul:

$$a(t) = -\left[\frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{M N^3}\right]^2 \cdot x(t). \tag{7}$$

A fenti egyenlet származtatásánál kihasználtuk, hogy első (lineáris) közelítésben

$$\frac{1}{r(t)^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\,\frac{x(t)}{r_0}\right) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{r(t)^3} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\,\frac{x(t)}{r_0}\right).$$

A (7) egyenlet (amelyben $a(t)$ nemcsak $r(t)$ „gyorsulása”, hanem az attól csak egy r_0 konstanssal különböző $x(t)$ gyorsulása is) a harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete, és a szögletes zárójelben álló kifejezés a rezgés körfrekvenciájának négyzete. Ezek szerint

$$\omega_{\text{ingadozás}} = \frac{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}{M N^3},$$

ami (4) szerint éppen a csillagok keringési szögsebességével egyezik meg. Ezek szerint

$$T_{\text{ingadozás}} = T_{\text{csillag}} = 2\pi \frac{M N^3}{\gamma^2 (m_1 m_2)^3}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)