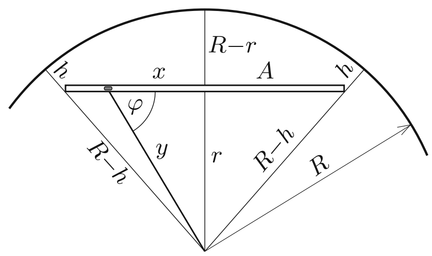
A Pitagorasz-tételből kiszámolh

távolságra van, így

R

a) Az alagút két vége a felszín alatt $h=0{,}02$ km mélyen van, így távolsága a Föld középpontjától magasan áll az alagút közepe fe



b) A vagon és a Föld tömegközpontjának távolsága folyamatosan változik, ezért a vagonra ható gravitációs erő is folyamatosan változik. Amikor a vagon y távolságra van a Föld középpontjától, akkor a tömegvonzás szempontjából csak az M tömegű Földnek az y sugarú gömbön belüli, m^* tömegű része jön számításba, ahol

$$m^* = M\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{y^3}{R^3}M.$$

Az m tömegű vagonra ható gravitációs erő:

$$F_{\mathrm{grav}} = \gamma\frac{mm^*}{y^2} = \gamma\frac{mM}{R^3}\,y,$$

amelynek a pálya irányába eső, a pálya középpontja felé mutató komponense:

$$F = -F_{\mathrm{grav}}\cdot\cos\varphi = -F_{\mathrm{grav}}\,\frac{x}{y} = -\gamma\frac{mM}{R^3}\,x.$$

A képletben x a vagon és a pálya középpontjának távolságát jelöli. Láthatjuk, hogy a testre ható erő arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú, ezért a test harmonikus rezgőmozgást végez, éppen úgy, mint egy

$$D = \gamma\frac{mM}{R^3}$$

rugóállandójú rugó által kifejtett erő hatására tenné. Jelen esetben a vagon egy félperiódusnyit mozog, tehát a menetideje:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 2531\ \mathrm{s} \approx 42\ \mathrm{perc}.$$

Megjegyzés. Felhasználva, hogy a nehézségi gyorsulás a Föld felszínén $g=\gamma M/R^2$, a vagon mozgásának ideje a $t=\pi\sqrt{R/g}$ összefüggésből is kiszámítható.

c) A vagon harmonikus rezgőmozgást végez $A=20$ km-es amplitúdóval, ezért az alagút közepén lesz a legnagyobb a sebessége:

$$v_{\max} = A\frac{2\pi}{T} = 24{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 89{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Debreczeni Tibor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)