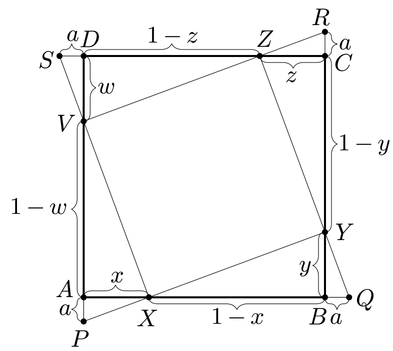
Tudjuk, hogy $X = X'$. Legyen a négyzet oldala egységnyi, ez nem jelent korlátozást. Legyen $AP = BQ = CR = DS = a$, továbbá $AX = x$, $XB = 1 - x$, $BY = y$, $YC = 1 - y$, $CZ = z$, $ZD = 1 - z$, $DV = w$ és $VA = 1 - w$.



Ekkor a DVZ háromszög hasonló lesz a CRZ háromszöghöz, mivel a DV oldal párhuzamos a CR oldallal, a másik két oldaluk pedig egy egyenesre esik. Megfelelő oldalaik aránya tehát megegyezik:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{a}{w}.$$

Ugyanígy az SDV és az XAV háromszögek is hasonlóak lesznek, tehát a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{a}{w} = \frac{x}{1-w}.$$

Ebből a két egyenletből következik, hogy

$$\frac{z}{1-z} = \frac{x}{1-w}.$$

Ugyanígy felírva a PAX és XBY, illetve QBY és ZCY hasonló háromszögekre az arányokat kapjuk, hogy

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{1-x} = \frac{a}{y} \quad \text{és} \quad \frac{a}{y} = \frac{z}{1-y}.$$

Ezzel tehát az is teljesül, hogy

$$\frac{z}{1-y} = \frac{x}{1-x}.$$

Osszuk el egymással a $\dfrac{z}{1-z} = \dfrac{x}{1-w}$ és $\dfrac{z}{1-y} = \dfrac{x}{1-x}$ egyenletek megfelelő oldalait. Kapjuk, hogy

$$\frac{1-y}{1-z} = \frac{1-x}{1-w}. \tag{1}$$

Az oldalak betűzésétől függetlenül jöttek ki ezek az arányok, így ugyanezek miatt felírható az is, hogy:

$$\frac{1-z}{1-w} = \frac{1-x}{1-y}.$$

Ebből átrendezéssel:

$$\frac{1-y}{1-w} = \frac{1-x}{1-z}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) hányadosára:

$$\frac{1-w}{1-z} = \frac{1-z}{1-w}.$$

Ez pedig csak úgy lehet, ha

$$1 - w = 1 - z.$$

Szimmetria miatt $1-y = 1-x = 1-w = 1-z$ is igaz lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyzet oldalait egyenlő arányban osztják az $XYZV$ négyszög csúcsai, tehát az XBY, YCZ, ZDV és VAX háromszögek egybevágó derékszögű háromszögek. Ebből pedig már következik, hogy $XYZV$ négyzet (mivel oldalai egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra), és éppen ezt akartuk belátni.

Csizmadia Viktória (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján