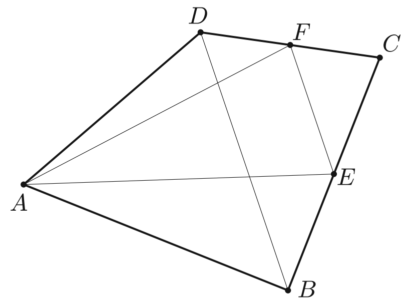
Használjuk az *1. ábrát.* Legyenek az ABE, AEF, AFD, FEC háromszögek területeinek mérőszámai (nem feltétlenül ebben a sorrendben) az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ pozitív egész számok. Ekkor $T_{ABCD} = 4n+6$. Mivel $T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD}$, emiatt T_{ABD} pontosan akkor maximális, ha T_{BCD} minimális.



1. ábra

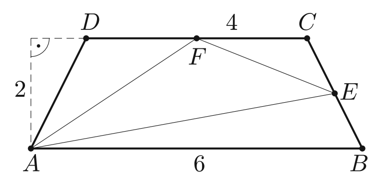
Másfelől a BCD háromszögben EF a BD-vel párhuzamos középvonal, emiatt a BCD háromszög hasonló az ECF háromszöghöz. A hasonlóság aránya 2, így a háromszögek területeire $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF}$ teljesül.

Mivel T_{ECF} az n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ számokból kerül ki, ezért T_{BCD} akkor a legkisebb, ha $T_{ECF} = n$, és ekkor $T_{BCD} = 4 \cdot T_{ECF} = 4n$. Ekkor $T_{ABD} = T_{ABCD} - T_{BCD} = (4n+6) - 4n = 6$.

Vagyis az ABD háromszög területének lehető legnagyobb értéke 6 területegység.

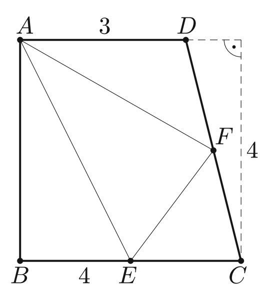
Meg kell még mutatnunk, hogy létezik megfelelő $ABCD$ négyszög. Ehhez néhány példa a beküldött jó konstrukciók közül. (*Sajnos a beküldött megoldások jelentős részében ezt elfelejtették megmutatni, ezért a viszonylag sok* 4 *pontos dolgozat.*)

1. példa: Legyen $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $AB = 6$, illetve $CD = 4$ és az alapokhoz tartozó magassága 2 (*2. ábra*). Ekkor $T_{ABD} = 6$; $T_{ABCD} = 10$, $T_{ABE} = 3$, $T_{AFD} = 2$ és $T_{ECF} = 1$, amiből $T_{AEF} = 10 - (3+2+1) = 4$.



2. ábra

2. példa: Most $ABCD$ olyan trapéz, melynek alapjai $BC = 4$, illetve $AD = 3$ és az alapokhoz tartozó magassága 3 (*3. ábra*). Ekkor $T_{ABD} = 6$; $T_{ABCD} = 14$, $T_{ABE} = 4$, $T_{AFD} = 3$ és $T_{ECF} = 2$, amiből $T_{AEF} = 14 - (4+3+2) = 5$.



3. ábra

(*Több példa voltaképpen ezen a két ábrán alapult; az alapokat felezve, kétszerezve, vagy* $\sqrt{2}$*-vel osztva, míg a magasságot pont fordítva alakítva: duplázva, felezve, illetve* $\sqrt{2}$*-vel szorozva.*)

3. példa: Az utolsó példánk (bár AB itt is párhuzamos CD-vel) arra épít, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Legyen $ABCD$ olyan négyszög, melynek átlói merőlegesen metszik egymást az M pontban,

$$AM = \frac{6\sqrt{2}}{5}, \quad CM = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \quad BM = 3\sqrt{2} \;\text{ és }\; DM = 2\sqrt{2}$$

hosszú (*4. ábra*). Ekkor

$$T_{ABE} = \frac{T_{ABC}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2 \cdot 2} = 3,$$

$$T_{AFD} = \frac{T_{ACD}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)}{2 \cdot 2} = 2,$$

míg

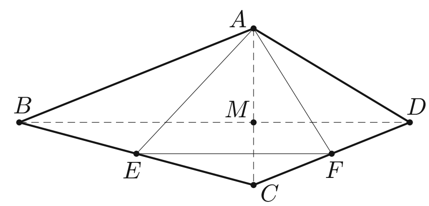
$$T_{ECF}=\frac{T_{BCD}}{4}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}}{2\cdot 4}=1.$$

Mivel

$$T_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\frac{10\sqrt{2}}{5}}{2}=10,\quad\text{innen}\quad T_{AEF}=10-(3+2+1)=4.$$

Végül

$$T_{ABD}=\frac{\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\cdot\frac{6\sqrt{2}}{5}}{2}=6.$$



4. ábra

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
Lukács Lilla Réka (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.),
Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Szakgimn., 11. évf.) és
Schrettner Jakab (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján