Ha valamilyen $k \leq n$-re $a_{2k-1} = 0$, akkor $a_{2k-1} = a_{2k} = \ldots = a_{2n-1} = a_{2n} = 0$, és ugyanolyan feltételek mellett feladatként a bizonyítandó egyenlőtlenség $n = k-1$ esetét kapjuk. Ha pedig $a_{2k-1} > 0 = a_{2k}$, akkor hasonlóan elég $n = k-1$-re igazolni az állítást. Ezért az egyenlőtlenség bizonyítása során feltesszük, hogy a_{2n}, és így valamennyi a_j pozitív.

A feltételek szerint minden $t > k$-ra $a_{2t-1}a_{2t} \leq a_{2k-1}a_{2k}$, azaz

$$a_{2t-1}a_{2t} \leq \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}};$$

így

$$(2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leq a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{k=1}^{t-1} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}a_{2t-1}a_{2t}}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\sum_{t=1}^{n}(2t-1)a_{2t-1}a_{2t} \leq \sum_{t=1}^{n} a_{2t-1}a_{2t} + 2\sum_{1\leq k<t\leq n} \sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}\sqrt{a_{2t-1}a_{2t}} = \\ = \left(\sum_{b=1}^{n}\sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2.$$

Az utóbbi összeg mindegyik tagjára a (kéttagú) számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felírva:

$$\left(\sum_{b=1}^{n}\sqrt{a_{2b-1}a_{2b}}\right)^2 \leq \left(\sum_{b=1}^{n}\frac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőséget akkor kapunk, ha valamennyi $a_{2t-1}a_{2t} \leq a_{2k-1}a_{2k}$ és $\sqrt{a_{2b-1}a_{2b}} \leq \dfrac{a_{2b-1}+a_{2b}}{2}$ becslésünkben egyenlőség áll. Előbbieknél ez ($a_j > 0$ miatt) $a_{2t-1} = a_{2k-1}$ és $a_{2t} = a_{2k}$ (minden $k < t$-re), utóbbiaknál pedig $a_{2b-1} = a_{2b}$ esetén (minden b-re) teljesül, vagyis $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n}$-re. Az általános esetben tehát az egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad \text{vagy}$$
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2v} = \frac{1}{2v}, \quad a_{2v+1} = a_{2v+2} = \ldots = 0, \quad \text{valamely} \quad 1 \leq v < n\text{-re.}$$

Kupás Vendel Péter (Gyöngyösi Berze Nagy János Gimn., 12. évf.)