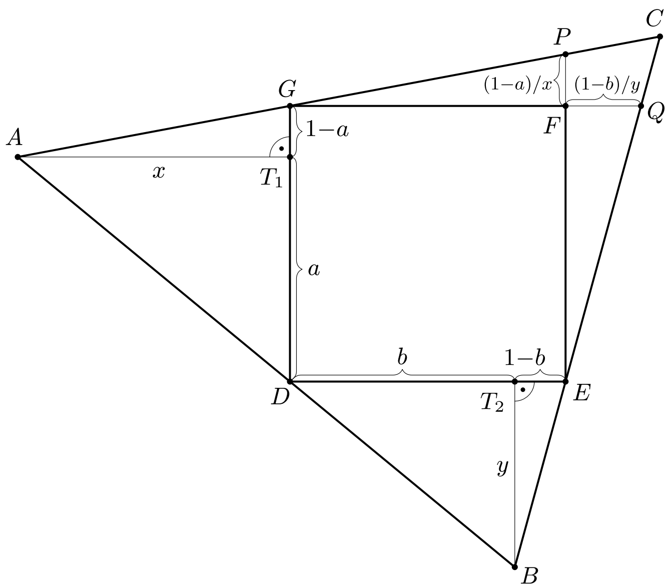
A minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy pontját, különben a megfelelő oldalegyenest a négyzet irányába párhuzamosan eltolhatnánk, amivel a háromszög területét csökkentenénk. Világos, hogy ha a háromszög egyik oldala tartalmazza a négyzet egy oldalának egy belső pontját, akkor az egész oldalt is tartalmazza (mivel a háromszög tartalmazza a négyzetet), ezért feltehetjük, hogy a minimális területű háromszög minden oldala biztosan tartalmazza a négyzetnek legalább egy csúcsát. Ha két oldal ugyanazt a négyzetcsúcsot tartalmazza, akkor a háromszögnek és négyzetnek van egy közös csúcsa. E közös csúcs körül a háromszög illeszkedő oldalait elforgathatjuk, hogy rendre egybeessenek a négyzet oldalaival, ezzel a háromszög területét nem növeljük.



Összességében azt kaptuk, hogy az *ábra* általános érvényű azzal a kiegészítéssel, hogy a $CPFQ$ négyszög esetleg szakasszá vagy ponttá fajulhat (s ezzel együtt az AT_1G és BT_2E háromszögek is elfajulhatnak természetesen), ezek azonban gondolatmenetünket érdemben nem befolyásolják. Használjuk tehát az ábra jelöléseit, továbbá legyen $DT_1 = a$, $AT_1 = x$; $DT_2 = b$ és $BT_2 = y$. Ekkor $GT_1 = 1 - a$ és $ET_2 = 1 - b$. A szögeik egyenlősége miatt $AT_1G\triangle \sim GFP\triangle$ és $BT_2E\triangle \sim EFQ\triangle$ teljesül, amiből $PF = (1-a)/x$ és $FQ = (1-b)/y$ adódik. Továbbá

$$ADT_1\triangle \sim DBT_2\triangle$$

miatt $ab = xy$ is teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x/a \le 1$. (Különben $y/b \le 1$, és a szerepek szimmetrikusak.)

Becsüljük alulról az ABC háromszög T területét:

$$(1)\qquad \begin{aligned} T \ge T - T_{FQCP} &= T_{DEFG} + T_{ADG} + T_{BED} + T_{FPG} + T_{QFE} = \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\frac{1-a}{x}}{2} + \frac{\frac{1-b}{y}}{2} = 1 + \frac{x + y + \frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y}}{2}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1-a}{x} + \frac{1-b}{y} - \frac{1-xy}{y} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} - \frac{b}{y} + x = x + \frac{1}{x} - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \ge 0,$$

ugyanis a feltevés szerint $a \le 1$, s így $x \le \dfrac{x}{a} \le 1$ teljesül, továbbá az $f(t) = t + 1/t$ függvény a $(0,1]$ intervallumon monoton csökken. Ebből, folytatva (1)-et, tovább becsülhetjük alulról T-t:

$$T \ge 1 + \frac{x + y + \frac{1-xy}{y}}{2} = 1 + \frac{y + \frac{1}{y}}{2} \ge 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $T_{FQCP} = 0$, azaz a négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög valamely oldalára (a négyzet maradék két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalán van). Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ilyenkor valóban $T = 2$.

Tehát egy egységnégyzetet magában foglaló háromszög területe legalább 2 területegység.

Daróczi Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.)