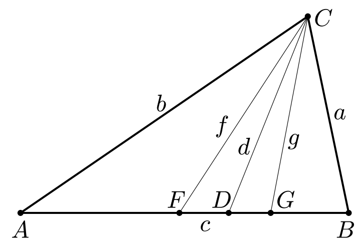
Használjuk az *ábra* jelöléseit, a C-ből induló szögfelező hossza legyen d, a háromszög belső szögei α, β és γ. Írjuk fel $ABC\triangle$ területét kétféleképpen:

$$\frac{ab\sin\gamma}{2}=T_{ABC}=T_{ADC}+T_{BCD}=$$
$$=\frac{db\sin\frac{\gamma}{2}}{2}+\frac{ad\sin\frac{\gamma}{2}}{2}.$$

Innen, felhasználva hogy $\sin\gamma=2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, kapjuk:

$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$



A kitűzöttnél erősebb

(1) $$\max\{f,g\}<\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{d}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

állítást fogjuk igazolni. Az FDC háromszögben $F\sphericalangle=\alpha+\gamma/3$ és $D\sphericalangle=\beta+\gamma/2$, így a szinusz-tétel szerint

$$\frac{f}{d}=\frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $0<\alpha,\gamma<\pi/2$ és $\alpha+\gamma\ge\pi/2$, akkor

(2) $$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}<1.$$

Ebből, mivel f és g szerepe szimmetrikus, következik (1). Először tegyük fel, hogy $\alpha+\gamma=\pi/2$. Ekkor

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\gamma}{3}\right)}=\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{2\gamma}{3}}=$$
$$=\frac{1+\cos\gamma}{2\cos\frac{2\gamma}{3}}=\frac{1+4\cos^3\frac{\gamma}{3}-3\cos\frac{\gamma}{3}}{4\cos^2\frac{\gamma}{3}-2}.$$

Mivel $0<\gamma/3<\pi/6$, így $\sqrt{3}/2<\cos\gamma/3<1$. Az $x:=\cos\gamma/3$ jelölést bevezetve ez a bizonyítandó állítás:

$$\frac{4x^3-3x+1}{4x^2-2}<1\ \Leftrightarrow\ 4x^3-4x^2-3x+3<0\ \Leftrightarrow\ (x-1)(4x^2-3)<0.$$

Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, mert $x-1<0$ és $4x^2-3>0$, ezért $\alpha+\gamma=\pi/2$ esetén (2)-t beláttuk.

Most rögzítsük γ-t, és legyen

$$f(\alpha)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

Megmutatjuk, hogy f a $[\pi/2-\gamma,\pi/2]$ intervallumon monoton csökken. Ehhez deriváljuk f-et:

$$f'(\alpha)=\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}=$$
$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{-\gamma}{6}}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{3}\right)}.$$

A derivált triviálisan negatív, így f valóban monoton csökkenő. Ebből és az $\alpha+\gamma=\pi/2$ speciális esetből (2) és így az állítás is következik.

Megjegyzések: 1. A (2) egyenlőtlenséget deriválás nélkül, trigonometrikus azonosságok ügyes alkalmazásával is igazolhatjuk. Érdemes azonban a bemutatott módszert észben tartani, amikor egyenlőtlenséget akarunk bizonyítani. Ha a derivált előjele triviálisan látszik, mint esetünkben is, akkor biztosan megkönnyíti a számolást.

2. Honlapunkon található a feladatra két elemi megoldás, amelyek nem használnak differenciálszámítást.