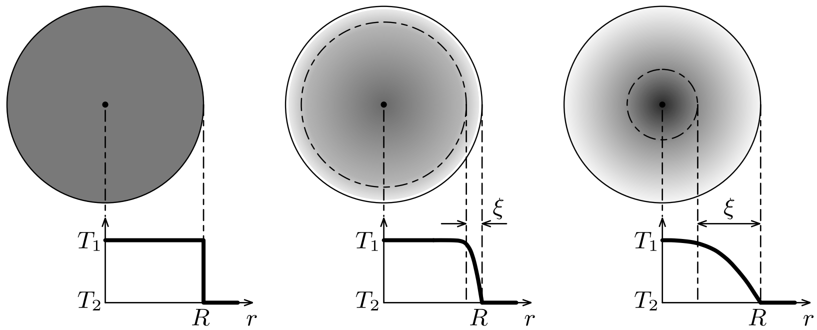
I. megoldás. A hosszú ideje lobogó vízbe merülő golyó belsejében a hőmérséklet mindenhol $T_1 = 100\ ^\circ$C-os. Amikor a golyót a $T_2 = 0\ ^\circ$C-os, jeges vízbe tesszük, akkor annak külső része kezd el először lehűlni, majd ez a „hidegfront" halad fokozatosan a golyó belseje felé. A hőszigetelő edénybe helyezve a golyó belső energiája már nem változik tovább, csak annyi történik, hogy a hőmérséklet a belsejében kiegyenlítődik. Vajon mekkora tipikus ξ mélységig hatol be a hidegfront a golyóba 30 másodperc alatt? Elképzelhető, hogy csak a golyó legkülső, vékony „kérge" hűl le a jeges vízben, de az is, hogy szinte az egész golyó lehűl, csak a közepe táján marad meleg (*4. ábra*).

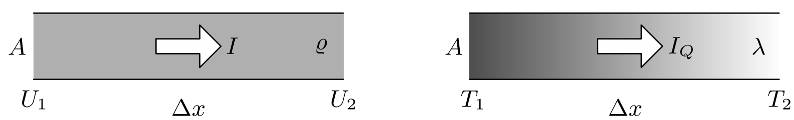


4. ábra

A golyó belseje és a jeges vízzel érintkező (0 °C-os) felülete közötti hővezetést a Fourier-törvény írja le, amely analóg a fémek elektromos vezetését leíró Ohm-törvénnyel (*5. ábra*). Míg egy állandó A keresztmetszetű, Δx hosszúságú egyenes vezetékben folyó elektromos áram (I) a vezeték végei közötti ΔU potenciálkülönbséggel arányos, addig ugyanezen vezetékben terjedő hőáram (I_Q) a ΔT hőmérséklet-különbséggel arányos:

$$I = -\frac{1}{\varrho} A \frac{\Delta U}{\Delta x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

ahol $1/\varrho$ a vezeték anyagának elektromos vezetőképessége (a fajlagos ellenállás reciproka), λ pedig a hővezetési tényező.



5. ábra

Sajnos golyó (gömbgeometria) esetén a Fourier-törvény matematikai alakja a fentinél bonyolultabb. További nehézség, hogy a feladatban a hőmérsékleteloszlás nem állandó (nem stacionárius), hanem a hőáram hatására időben változik. Ilyen körülmények között reménytelen a feladatra matematikailag egzakt választ adni. Megpróbálhatjuk azonban dimenzionális megfontolásokkal kitalálni, hogy hogyan függ a hidegfront ξ behatolási mélysége az időtől.

Első lépésként vizsgáljuk meg, milyen mennyiségektől függhet ξ. Természetesen függ az időtől, ezen kívül függ még a golyó λ hővezetési tényezőjétől (rossz hővezető esetén ξ lassabban növekszik), az üveg ϱ sűrűségétől és c fajhőjétől. A golyó R sugara is fontos paraméter lehet, de ha $\xi \ll R$ (azaz a jeges vízbe merítés ideje viszonylag rövid), akkor a hidegfront terjedésére lényegében nincs hatással a golyó véges mérete. Mi a helyzet a golyó közepe és a felülete közötti hőmérséklet-különbséggel? A Fourier-törvény szerint kétszer akkora hőmérséklet-különbséghez kétszer akkora hőáram tartozik, de ekkor a golyó egyes rétegeinek lehűtéséhez szükséges hőelvonás is megkétszereződik. Tehát a hidegfront időbeli terjedését nem, csupán a „magasságát" befolyásolja $\Delta T = T_1 - T_2$ értéke.

Keressük tehát a ξ behatolási mélységet a következő alakban:

$$\xi \sim \lambda^\alpha \varrho^\beta c^\gamma t^\delta,$$

ahol α, β, γ és δ dimenziótlan konstans kitevők. A jobb oldalon álló mennyiségek mértékegységei:

$$[\lambda] = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^3 K}}, \quad [\varrho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}, \quad [c] = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2 K}}, \quad [t] = \mathrm{s}.$$

Ezekből csak egyféleképpen „keverhetünk ki" méter dimenziójú mennyiséget:

$$\xi(t) \sim \sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}}.$$

Egy dimenziótlan faktor erejéig most már ismerjük a $\xi(t)$ függvényt, de vajon mi az arányossági tényező? Nem tudjuk, de várhatóan egységnyi nagyságrendű, és mivel becslésről volt szó, vegyük 1-nek! A megadott adatok alapján tehát $t = 30$ s alatt a „hidegfront" behatolási mélysége:

$$\xi \approx \sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}} \approx 3{,}7\ \mathrm{mm},$$

ami majdnem egy nagyságrenddel kisebb a golyó $R = 30$ mm-es sugaránál. Előzetes feltevésünk, mely szerint ξ sokkal kisebb R-nél, utólag beigazolódott.

A T_∞ egyensúlyi hőmérsékletet becsüljük úgy, hogy a ξ vastagságú kéreg hőmérséklete $T_2 = 0$ °C, azon belül pedig $T_1 = 100$ °C. A hőmérséklet kiegyenlítődését kifejező egyenlet:

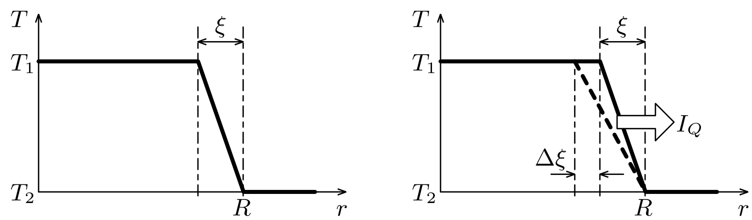
$$\frac{4}{3}\pi(R-\xi)^3 T_1 + \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - (R-\xi)^3\right] T_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 T_\infty,$$

amiből $\xi \ll R$ felhasználásával (csak a ξ-ben elsőfokú tagokat tartva meg) megkapjuk a golyó egyensúlyi hőmérsékletét:

$$T_\infty \approx T_1 - \frac{3\xi}{R}(T_1 - T_2) \approx 63\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Mivel becslésről van szó, ezért az eredmény második értékes jegyét nem szabad nagyon komolyan vennünk.

II. megoldás. Használjuk a Fourier-törvényt, és közelítsük a hőmérsékletprofilt a *6. ábra* bal oldalán látható, szakaszonként lineáris függvénnyel! (Könnyen belátható, hogy egy ilyen hőmérsékletprofil később nem marad szakaszonként lineáris, de ez a becslésünk érvényességét nem befolyásolja majd.)



6. ábra

A várhatóan kis ξ behatolási mélység miatt a problémát kezelhetjük egydimenziósként (azaz golyó helyett egy végtelen féltér esetét vizsgáljuk). Tegyük fel, hogy t idő után a „lineáris hidegfront” szélessége ξ. Ekkor a golyó belsejéből a jeges vízbe átmenő hőáram nagysága (teljesítmény):

$$I_Q = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\xi}. \tag{4}$$

Ez a kiáramló teljesítmény okozza Δt idő alatt a hidegfront $\Delta\xi$ szélesedését (*6. ábra* jobb oldala):

$$I_Q \Delta t = c\varrho A\left[T_1\Delta\xi + \frac{T_1+T_2}{2}\xi\right] - c\varrho A\frac{T_1+T_2}{2}(\xi + \Delta\xi),$$

ahol a behatolási mélységnek megfelelő rész energiáját a szélein mért hőmérsékletek átlagának segítségével fejeztük ki. Ebből rendezés után adódik:

$$I_Q = c\varrho A\frac{T_1 - T_2}{2}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta t}. \tag{5}$$

A hőáramokra kapott (4) és (5) összefüggéseket egyenlővé téve kapjuk:

$$\xi\,\Delta\xi = \frac{2\lambda}{c\varrho}\Delta t.$$

Összegezzük fel ennek az egyenletnek mindkét oldalát! Ekkor a jobb oldalon a vízbe merítés t ideje, a bal oldalon pedig $\xi^2/2$ jelenik meg (ezt beláthatjuk pl. egy összenyomott rugóban tárolt energia analógiájával vagy integrálással). Tehát a „lineáris hidegfront” behatolási mélysége az idő függvényében:

$$\xi(t) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{c\varrho}t} \sim \sqrt{t},$$

ami egy 2-es faktor erejéig egyezik a dimenzióanalízis eredményével.

A hőmérséklet kiegyenlítődését kifejező egyenlet ($\xi \ll R$ közelítésben):

$$\frac{4}{3}\pi(R-\xi)^3 T_1 + 4\pi R^2\xi\frac{T_1+T_2}{2} \approx \frac{4}{3}\pi R^3 T_\infty,$$

ebből

$$T_\infty \approx T_1 - \frac{3\xi}{2R}(T_1 - T_2).$$

Végül a szakaszosan lineáris hőmérsékletprofilra levezetett ξ behatolási mélységet felhasználva kapjuk a becslés végső formuláját:

$$T_\infty = T_1 - \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}}(T_1 - T_2).$$

Az adatokat behelyettesítve $T_\infty \approx 63$ °C egyensúlyi hőmérséklet adódik, egyezésben a dimenzióanalízissel kapott értékkel.