

**I. megoldás.** A feladat nehézsége abban rejlik, hogy a fémgömbök eredetileg fennálló gömbszimmetriáját elrontja a  $Q$  ponttöltés jelenléte. Emiatt a gömbökön kialakuló töltéeloszlás erősen inhomogén lesz, és az elektromos mező szerkezete is meglehetősen bonyolult. Szerencsére a töltéeloszlás meghatározása elkerülhető, amint azt az alábbi megoldásban látni fogjuk.

Jelöljük a kis fémgömb pillanatnyi töltését  $q_1$ -gyel, a nagyobb gömbét  $q_2$ -vel, a ponttöltés pillanatnyi távolságát a gömbök középpontjától pedig  $r$ -rel! A kisebb fémgömb potenciálja a földelés miatt nulla, és mivel a fém ekvipotenciális, ugyanez a középpontjára is igaz. A gömbökön elhelyezkedő töltések azonos ( $R$ , illetve  $3R$ ) távolságra helyezkednek el a gömbök közös középpontjától, ezért itt a potenciált könnyen felírhatjuk:

$$(1) \quad k \frac{q_1}{R} + k \frac{Q}{r} + k \frac{q_2}{3R} = 0.$$

A nagy gömbön kívül a földelés miatt nincs elektromos tér (a belső töltések terét a nagy gömb teljesen leárnyékolja), így a Gauss-törvény értelmében a rendszer össztöltése nulla:

$$(2) \quad Q + q_1 + q_2 = 0.$$

A fenti két egyenletből a kisebb gömb töltésének abszolút értéke kifejezhető  $r$  függvényében:

$$(3) \quad q_1(r) = - \left( \frac{3R}{2r} - \frac{1}{2} \right) Q.$$

Mivel a gömbök össztöltése állandó ( $-Q$ ), így a ponttöltés mozgása közben csak a gömbök közötti vezetékben folyik áram, a földbe jutó vezetékben nem. A kis gömbre vonatkozó kontinuitási egyenletből a gömbök között folyó áram deriválással (vagy a kis megváltozásokra érvényes formulák segítségével) meghatározható:

$$I = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dq_1}{dr} = v \frac{dq_1}{dr} = \frac{3}{2} \frac{QvR}{r^2},$$

az áram iránya pedig a kis gömb felé mutat. Tehát az áramerősség értéke, amikor a ponttöltés éppen  $r = 2R$  távolságra van a gömbök középpontjától:

$$I = \frac{3}{8} \frac{Qv}{R}.$$

**II. megoldás.** Az első megoldás kulcsa az volt, hogy észrevettük: a potenciál értéke könnyen kiszámítható a gömbök közös középpontjában. Az (1) és (2) egyenletekhez más módon, a szuperpozíciós elv segítségével is eljuthatunk.

Képzeld el, hogy a gömbök középpontjától  $r$  távolságra elhelyezkedő  $Q$  ponttöltést gondolatban  $N$ -edrésszére csökkentjük. Ekkor a gömbök  $q_1$  és  $q_2$  töltése is  $N$ -edrésszére csökken. Forgassuk el ezt az elrendezést a gömbök középpontja körül egy kicsit, és szuperponáljuk rá az eredeti elrendezésre! Így már két  $Q/N$  ponttöltés helyezkedik el a középponttól  $r$  távolságra, a gömbök töltése pedig rendre  $2q_1/N$  és  $2q_2/N$ . Ismételjük meg ezt az eljárást még  $(N-2)$ -ször úgy, hogy végül összesen  $Q$  töltés legyen az  $r$  sugarú gömbfelületen, a lehető legegyszerűbben elrendeződésben. Az  $N \rightarrow \infty$  határesetben a ponttöltést ilyen módon végül „szétkenhetjük” egy  $r$  sugarú, egyenletes felületi töltéssűrűségű,  $Q$  össztöltésű gömbhéjjá, miközben a fémgömbök  $q_1$  és  $q_2$  töltése változatlan marad. Ennek az az előnye, hogy az eredeti feladatot visszavezettük egy könnyebb, gömbszimmetrikus problémára.

Ismert, hogy egy egyenletesen töltött gömbhéj potenciálja kívül úgy számítható, mintha a gömb töltése a középpontjában összpontosulna, belül pedig ugyanakkora, mint a gömb felületén. A legkülső, földelt gömb felületén tehát a potenciált a három ( $q_1$ ,  $Q$  és  $q_2$  töltésű) gömbhéj potenciáljának összegeként kaphatjuk meg:

$$k \frac{q_1}{3R} + k \frac{Q}{3R} + k \frac{q_2}{3R} = 0,$$

ami ekvivalens a (2) egyenlettel. A kis gömb felületén a (szintén nulla) potenciált teljesen hasonlóan, három tag összegeként írhatjuk fel: a legkülső gömb járuléka  $kq_2/(3R)$ , a „szétkent” ponttöltésé  $kQ/r$ , míg a legbelső gömbé  $kq_1/R$ . Ez végül az (1) egyenletre vezet. Az (1) és (2) egyenletek birtokában a végeredményhez az I. megoldással azonos módon juthatunk el.

*Megjegyzés.* Az egyik második díjat nyert versenyző, *Marozsák Tóbiás* egy harmadik úton oldotta meg a feladatot. Ismert, hogy ha egy földelt, vezető gömbhéj közelébe egy ponttöltést helyezünk, akkor a gömbön megosztott töltések helyettesíthetők egy, a gömbfelület ponttöltéssel átellenes oldalán elhelyezett tükörtöltéssel. Ennek a tükörtöltésnek a nagysága és helyzete kiszámolható abból a feltételből, hogy a gömb teljes felülete nulla potenciálú. A feladatban szereplő két, koncentrikus gömbhéj esetén a  $Q$  töltést először „tükröznünk” kell mindkét gömbre, majd az így kapott tükörtöltésekkel is folytatni kell az eljárást. Végül váltakozó előjelű tükörtöltések végtelen sorát kapjuk a kis gömbön belül és a nagy gömbön kívül. A kis gömbön belüli tükörtöltések össztöltése (azaz  $q_1$ ) egy geometriai sor felösszegzésével kiszámítható, és így közvetlenül a (3) egyenlethez jutunk. Bár ez a módszer matematikailag sokkal nehezebb, mint a fenti két, részletesen ismertetett megoldás, elvben lehetőséget ad a gömbök között kialakuló elektromos tér (legalább numerikus) meghatározására is.