A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c \leq d$. A számnégyesben szereplő 1-esek száma szerint öt eset lehetséges.

1. eset: a, b, c és d közül mind a négy egyenlő 1-gyel.

Ekkor $abcd-1=0$, tehát $a+b+c+d=0$ kellene, hogy legyen, de ez nem teljesül.

2. eset: a, b, c és d közül három egyenlő 1-gyel. Ekkor a megoldás elején tett feltevésünk miatt $a=b=c=1$. Ezt behelyettesítve ezt kapjuk: $d-1 \mid d+3$. Ekkor $d-1 \mid d+3-(d-1)=4$ is fennáll.

Mivel d pozitív egész, ezért a következő lehetőségek vannak: $d-1=1$, azaz $d=2$, és ez megoldás is; $d-1=2$, azaz $d=3$, ez is megoldás; végül $d-1=4$, azaz $d=5$, ami szintén megoldás. Mivel a 4-nek csak ez a három pozitív egész osztója van, ezért itt nem lesz több megoldás.

Ezentúl használni fogjuk a következő két összefüggést: ha $abcd-1 \mid a+b+c+d$, akkor $abcd-1 \leq a+b+c+d$ (ez pozitív egészek esetén teljesül); illetve $a+b+c+d \leq 4d$.

3. eset: a, b, c és d közül kettő egyenlő 1-gyel: $a=b=1$. Ekkor $cd-1 \mid c+d+2$. Ezt az esetet tovább bontjuk c értéke szerint.

Ha $c=2$, akkor felírhatjuk ezt az összefüggést:

$$\begin{aligned} 2d-1 &\leq d+4,\\ d &\leq 5. \end{aligned}$$

Itt a $d=2,3,4,5$ eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy a $d=2$ és a $d=5$ ad megoldást.

Ha $c=3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 3d-1 &\leq d+5,\\ d &\leq 3. \end{aligned}$$

Mivel $c \leq d$, ezért itt csak a $d=3$ eset lehetséges, ami megoldást is ad.

Ha pedig $c>3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 4d-1 \leq cd-1 \leq c+d+2 &\leq 2d+2, \quad \text{amiből}\\ 2d &\leq 3. \end{aligned}$$

Mivel $d>3$, ezért ez nem lehetséges.

Tehát itt megtaláltuk az összes megoldást.

4. eset: a, b, c és d közül egy egyenlő 1-gyel: $a=1$. Ekkor $bcd-1 \mid b+c+d+1$. Mivel $2 \leq b \leq c \leq d$, felírhatjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} 2\cdot 2\cdot d-1=4d-1 \leq bcd-1 \leq a+b+c+d=b+c+d+1 &\leq 3d+1, \quad \text{amiből}\\ 4d-1 &\leq 3d+1,\\ d &\leq 2. \end{aligned}$$

Mivel $d>1$, ezért itt csak a $d=2$ eset lehetséges, ami ad is egy megoldást $b=c=2$ esetén.

5. eset: a, b, c és d közül egyik sem 1. Mivel $2 \leq a \leq b \leq c \leq d$, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} 2\cdot 2\cdot 2\cdot d-1=8d-1 \leq abcd-1 \leq a+b+c+d &\leq 4d, \quad \text{amiből}\\ 8d-1 &\leq 4d,\\ 4d &\leq 1. \end{aligned}$$

Ennek pedig $2 \leq d$ esetén nem lesz megoldása, tehát itt nincs megoldás.

Összefoglalva, a következő megoldásokat kaptuk: $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$; $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=3$; $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=5$; $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=2$; $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=5$; $a=1$, $b=1$, $c=3$, $d=3$; $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=2$.

Kálóczi Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy másik, többek által használt gondolatmenet: feltesszük, hogy $a \leq b \leq c \leq d$, amiből $abcd-1 \leq a+b+c+d \leq 4d$. Ebből $abcd \leq 4d+1 \leq 5d$, azaz $abc \leq 5$ adódik. Innen (szintén esetszétválasztással) megkaphatóak a megoldások.

2. Több beküldőnél előfordult a következő hiba: az oszthatóság definíciója alapján felírták, hogy $(abcd-1)k = a+b+c+d$, amiből $abcdk=a+b+c+d+k$, továbbá a szimmetria miatt feltették, hogy $k \geq d \geq c \geq b \geq a$, amiből az $abcdk \leq 5k$ összefüggést kapták. Végül k-val osztva az $abcd \leq 5$ egyenlőtlenséghez jutottak. Ezt vizsgálva azonban nem az összes megoldást kapjuk meg. A hiba ott van a gondolatmenetben, hogy $k \geq d$ nem feltétlenül teljesül.

3. Honlapunkon egy harmadik megoldás olvasható.