A feladatot az (ideális egyenessel kibővített) projektív síkon, a Desargues-tétel többszöri alkalmazásával fogjuk igazolni. Ehhez néhány definíciót, és magát Desargues tételét mondjuk ki először.

1. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy e *egyenesre nézve (tengelyesen) perspektívek,* ha az AB és $A'B'$, az AC és $A'C'$, illetve a BC és $B'C'$ egyenespárok P, Q, R metszéspontjai mind rajta vannak az e egyenesen.

Megjegyzés. Az ideális egyenessel kibővített projektív síkon két háromszöget akkor is tengelyesen perspektívnek tartunk a definíció alapján, ha megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak (ekkor azok metszéspontjai mind rajta vannak az ideális egyenesen).

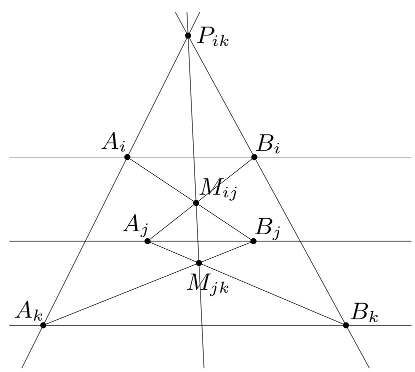
2. definíció. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy S *pontra nézve (centrálisan) perspektívek,* ha az AA', a BB', és a CC' egyenesek mind átmennek az S ponton.

Desargues tétele. Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek pontra nézve perspektívek, akkor egyenesre nézve is azok, és fordítva is igaz: ha a háromszögek egyenesre nézve perspektívek, akkor pontra nézve is azok.

Ezután térjünk rá a feladat bizonyítására.

Tetszőleges $1 \le i \ne j \le 4$ esetén jelölje P_{ij} az A_iA_j és B_iB_j egyenesek metszéspontját (mivel a megadott szakaszok különböző hosszúságúak, ezért a P_{ij} pontok nem ideális pontok). Legyen továbbá az egymással párhuzamos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 egyenesek közös (ideális) pontja D_∞.

Tekintsük az $A_iB_jA_k$ és a $B_iA_jB_k$ (ahol i, j, k tetszőleges különböző $1 \le i, j, k \le 4$ indexek) háromszögeket. Mivel a két háromszög a D_∞ pontra nézve perspektív, így Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektív, azaz az A_iB_j, A_jB_i, az A_jB_k, A_kB_j, illetve az A_iA_k, B_iB_k egyenespárok M_{ij}, M_{jk} P_{ik} metszéspontjai egy egyenesre esnek (lásd az *ábrát*).



Az i, j, k indexek megfelelő választásával adódik a következő hat darab ponthármasra, hogy az adott ponthármasok mind egy egyenesre esnek: (1) M_{13}, M_{23}, P_{12}; (2) M_{12}, M_{23}, P_{13}; (3) M_{12}, M_{13}, P_{23}; (4) M_{14}, M_{24}, P_{12}; (5) M_{14}, M_{34}, P_{13}, illetve (6) M_{24}, M_{34}, P_{23} mind (külön-külön) egy egyenesre esik.

Továbbá mivel az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ háromszögek a D_∞ pontra nézve perspektívek, Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektívek, azaz az A_1A_2, B_1B_2, az A_1A_3, B_1B_3, illetve az A_2A_3, B_2B_3 egyenespárok P_{12}, P_{13}, P_{23} metszéspontjai is (akár az imént) egy egyenesre esnek.

Utoljára tekintsük az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögeket.

A fentiek szerint

$$(1+4 \Rightarrow)\ M_{13}M_{23} \cap M_{14}M_{24} = P_{12}, \quad \text{illetve}$$
$$(2+5 \Rightarrow)\ M_{12}M_{23} \cap M_{14}M_{34} = P_{13} \quad \text{és} \quad (3+6 \Rightarrow)\ M_{12}M_{13} \cap M_{24}M_{34} = P_{23},$$

azaz a két háromszög a $P_{12}P_{13}P_{23}$ egyenesre perspektív, de akkor Desargues tétele alapján az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek pontra nézve is perspektívek, azaz az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek valóban egy ponton mennek át.

Megjegyzés (diszkusszió). Előfordulhat az A_i, B_i pontok megfelelő választása esetén, hogy az az S pont, amire nézve az $M_{12}M_{13}M_{23}$ és $M_{34}M_{24}M_{14}$ háromszögek perspektívek az ideális egyenes egy pontja. Ekkor – mivel projektív síkon dolgoztunk – természetesen az $M_{12}M_{34}$, $M_{13}M_{24}$ és $M_{14}M_{23}$ egyenesek párhuzamosak lesznek.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) és
Molnár-Sáska Zoltán (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján