I. megoldás. Alakítsuk a fenti egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96 \leq 0.$$

Mint ismeretes, amennyiben egy egész együtthatós polinomnak gyöke egy egész szám, úgy az a konstans tagjának osztója. Így érdemes megvizsgálni a -96 osztóit, annak reményében, hogy találunk köztük megoldást.

Első esetben $-96 = (-1) \cdot 96 = -96 = 1 \cdot (-96)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy egyik osztó sem megoldás.

Második esetben $-96 = (-2) \cdot 48 = 2 \cdot (-48)$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = -2$ gyöke az egyenletnek. Polinomosztással a következő harmadfokú függvényt kapjuk:

$$\left(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96\right) : (x+2) = x^3 - 6x^2 + 20x - 48.$$

A fenti elvet tovább alkalmazva: $-96 = 4 \cdot (-24)$ és $-96 = (-4) \cdot 24$. Behelyettesítve láthatjuk, hogy $x = 4$ szintén gyöke az egyenletnek. Egy további polinomosztással a már megkapott harmadfokú függvény alapján a következőt kapjuk:

$$\left(x^3 - 6x^2 + 20x - 48\right) : (x-4) = x^2 - 2x + 12.$$

Azonban ezen másodfokú polinom esetén a diszkrimináns értéke $4 - 4 \cdot 12 < 0$, vagyis nincs valós gyöke. Tehát az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x - 96$ függvény görbéje pontosan két pontban metszi az x-tengelyt. Mivel $f(-3) = f(5) = 189 > 0$ és $f(0) = -96 < 0$, ezért a függvény a $(-\infty; -2)$ és az $(4; \infty)$ intervallumon pozitív értékeket, míg a $(-2; 4)$ intervallumon negatív értékeket vesz fel. Minthogy grafikonja máshol nem metszi az x-tengelyt, így értéke nem is változhat pozitívról negatívra vagy fordítva egyéb helyeken. Mivel a feladatban szereplő egyenlőtlenség megengedi az egyenlőséget is, ezért $-2 \leq x \leq 4$ esetén teljesül.

Megjegyzés. Sokan számítógépes programmal ábrázolták az $f(x)$ függvényt, és úgy olvasták le a két gyököt. Ám ekkor még egyrészt ellenőrzéssel meg kell róla győződni, hogy valóban gyök a két leolvasott érték (hiszen lehetne a valódi gyök mondjuk $-2{,}00004$ is), másrészt be kell látni, hogy más megoldás nincsen (hiszen bármilyen programmal is ábrázoljuk, mindenképpen csak egy adott intervallumon látszódik a függvény görbéje).

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Azonos átalakításokkal az egyenlőtlenség bal oldala a következő szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 2x)\left((x^2 - 2x) + 4\right).$$

Vezessünk be új változót: $y = x^2 - 2x = x(x-2)$, ezzel a megoldandó egyenlőtlenségünk a következő egyszerű alakot ölti:

$$y^2 + 4y \leq 96.$$

Adjunk az egyenlőtlenség mindkét oldalához 4-et, így teljes négyzetet kapunk:

$$(y+2)^2 \leq 100.$$

Ennek megoldása: $-10 \leq y + 2 \leq 10$, amiből $0 \leq y \leq 8$ vagy $-12 \leq y < 0$.

Térjünk vissza a régi változóra. A következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$-12 \leq x(x-2) < 0, \quad \text{illetve} \quad 0 \leq x(x-2) \leq 8.$$

Az $f(x) = x(x-2)$ függvény negatív és zéró értéket a $[0; 2]$ intervallumon vesz fel, minimális értéke $f\left(\frac{0+2}{2}\right) = f(1) = -1$, tehát minden pontban igaz, hogy $x(x-2) \geq -12$. Vagyis az első egyenlőtlenség $x(x-2) < 0$, azaz $x \in (0; 2)$ esetén teljesül.

A vizsgált függvény pozitív értékeket az előbbi intervallumon kívül, vagyis $x \notin (0,2)$ esetén vesz fel, itt teljesülni kell az $x(x-2) \leq 8$ egyenlőtlenségnek. Az $x^2 - 2x - 8 = 0$ egyenlet gyökei

$$\frac{2 - \sqrt{4 + 4 \cdot 8}}{2} = -2 \quad \text{és} \quad \frac{2 + \sqrt{4 + 4 \cdot 8}}{2} = 4,$$

tehát ha $x \notin (0,2)$, akkor az $x(x-2) \leq 8$ egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2; 0] \cup [2; 4]$.

Végül az eredeti egyenlőtlenség megoldása $x \in [-2; 4]$.

Werner András (Budapest, Piarista Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Sokan oldották meg a honlapunkon is látható módon a feladatot: az egyenlőtlenséget

$$(x-1)^4 + 2(x-1)^2 - 99 \leq 0$$

alakra hozva, majd bevezetve az $y = (x-1)^2$ változót.