I. megoldás. Egy $n \times n$-es táblázat k-dik oszlopának *hibája* legyen $n - d(k)$, ahol $d(k)$ jelöli a k-dik oszlopbeli különböző számok számát. A *táblázat összhibája* pedig legyen a táblázatbeli oszlopok hibáinak összege. Azt kell igazolnunk, hogy T sorain belül lehet úgy permutálni az ott álló számokat, hogy az így kapott táblázat összhibája 0 legyen. Az alábbiakban egy olyan eljárást mutatunk, amely tetszőleges pozitív összhibájú táblázat esetén bizonyos sorok alkalmas átrendezésével csökkenti az összhibát. Mivel a szóban forgó összhiba egész szám, ezért e hibacsökkentő lépés véges sokszori alkalmazásával a táblázat összhibája 0-ra csökkenthető, és ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Tegyük fel tehát, hogy T-ben – mondjuk – az első oszlop hibája pozitív. Ennek oka, hogy legalább két azonos szám (mondjuk két 1-es) szerepel benne. Mivel T minden sorában legfeljebb egy 1-es szerepel, ezért T-nek lesz olyan oszlopa, amiben nem szerepel 1-es. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a második oszlop ilyen. Egy G irányított gráfot definiálunk a T táblázat első két oszlopában előforduló számok (mint csúcsok) halmazán úgy, hogy ha valamelyik sorban az első két elem i és j (ebben a sorrendben), akkor G-be behúzunk egy i-ből j-be vezető élt.

Induljunk el az így kapott G gráf 1-es csúcsából, és haladjunk az irányított élek mentén. Két eset lehetséges. Előbb-utóbb vagy egy olyan u (nyelő) csúcsba érkezünk, ahonnan nem vezet ki él vagy egy olyan v csúcsba érünk, ahol már korábban jártunk. Mindkét esetben felcseréljük a bejárt éleknek megfelelő sorok első két elemét. Ezáltal az első esetben az első oszlopban csökken az 1-esek száma, míg a második oszlopban megjelenik egy 1-es, továbbá, a második oszlopból egy, az első oszlopban eddig nem szereplő u elem kerül át az első oszlopba. Ettől eltekintve az egyes oszlophoz tartozó számhalmazok nem változnak, tehát T összhibája 2-vel csökken. A második esetben az első két oszlophoz tartozó számhalmazok úgy változnak, hogy egy 1-es átkerül az első oszlopból a másodikba, miközben egy ettől különböző, az első oszlopban már eddig is megtalálható v szám átkerül a második oszlopból az elsőbe. Ezáltal az első oszlopban álló számok halmaza nem változik, tehát az első oszlop hibája is annyi marad amennyi volt. Emellett azonban a második oszlop hibája, és ennek megfelelően a táblázat összhibája eggyel csökken. Ezzel a hibacsökkentő lépést leírtuk, a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. Készítsük el azt a G_T páros gráfot, amelynek egyik színosztályának $s_1, s_2, \ldots, s_n$ csúcsait a T táblázat sorai, a másik színosztálybeli $a_1, a_2 \ldots$ csúcsokat pedig a T-ben található számok alkotják. Az s_i és a_j csúcsok között pedig akkor fusson él G_T-ben, ha az a_j szám előfordul a T táblázat s_i sorában. Világos, hogy minden s_i csúcs G_T-beli fokszáma pontosan n, míg tetszőleges a_j csúcs fokszáma pedig legfeljebb n, hiszen egyfelől minden sorban pontosan n szám áll, másfelől pedig minden szám legfeljebb n-szer (soronként egyszer) fordul elő a T-ben. Kőnig ismert élszínezési tétele szerint tehát G_T élei kiszínezhetők az $1, 2, \ldots, n$ színek felhasználásával úgy, hogy a közös végponttal rendelkező élek különböző színt kapjanak.

Ennek a színezésnek a segítségével az alábbi módon rendezzük át a T táblázat sorait. Mivel s_i-ből G_T-ben n különböző színű él indul, ezért ezen élek közül pontosan egy (mondjuk $s_i a_j$) kapta a k-dik színt. Legyen ekkor a_j a T^* táblázat v_i sorának k-dik eleme. A G_T definíciója miatt a_j szerepel a T táblázat s_i sorában, tehát az imént definiált átrendezés valóban végrehajtható a T táblázaton. Mivel a fenti T^* minden egyes oszlopában azonos színre színezett éleknek megfelelő számok állnak, ezért T^* egyetlen oszlopában sem állhat két egyforma szám. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolunk.

Megjegyzések. 1. A feladat „hátterét” a II. megoldás mutatja: voltaképp Kőnig élszínezési tételével egyenértékű a bizonyítandó állítás. A trükk annyi, hogy a táblázat által definiált „szokásos” páros gráf helyett (aholis az oszlopok és a sorok felelnek meg a színosztályoknak, és a táblázat mezői pedig az éleknek), itt az egyik színosztályt a sorok, a másikat pedig a mezőkben álló számok alkotják, az éleket pedig az oszopok segítségével határozzuk meg. Érdemes végiggondolni, hogy mit is jelent a feladat állítása a „szokásos” értelmezés szerint. Azt kell igazolnunk, hogy bárhogy is adunk meg a $K_{n,n}$ páros gráf A színosztályának minden csúcsához n különböző színt, a gráf n^2 éle kiszínezhető úgy, hogy az azonos csúcsból induló élek színe különböző legyen és emellett minden él színe az A-beli végponthoz megadott színek közül kerüljön ki.

2. Dinitz sejtése azt mondja ki, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat mind az n^2 mezejéhez tartozik egy-egy n elemű halmaz, akkor kiválasztható ezen halmazoknak egy-egy eleme úgy, hogy azonos sorban vagy oszlopban álló mezőkhöz tartozó halmazokból ne válasszunk azonos elemet. Világos, hogy a sejtésből azonnal következik a feladat állítása, ha hozzárendeljük minden mezőhöz az adott mező sorában álló számokat. Dinitz sejtését Galvin igazolta, mégpedig abban az általánosabb formában, hogy ha egy G véges, páros gráf minden éléhez legalább akkora színlista tartozik, mint a G-beli legnagyobb fokszám, akkor minden élhez úgy választható a listájából egy-egy szín, hogy az így kapott színezésben azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja. Érdemes még megemlíteni, hogy nem páros gráfok esetén ugyanez az állítás azzal a változtatással, hogy a színlisták mérete a G gráf élkromatikus száma (ami páros gráfra Kőnig tétele szerint épp a maximális fokszám), nem más, mint az ún. listaszínezési sejtés, amire a mai napig nem ismert bizonyítás.

3. Többen próbálkoztak n szerinti teljes indukció alkalmazásával oly módon, hogy az indukciós lépésben először azt érik el, hogy az utolsó oszlop elemei különbözők legyenek, majd a bal felső $(n-1) \times (n-1)$-es táblázatra alkalmazzák az indukciós feltevést. Sajnos ebben a megközelítésben semmi sem garantálja, hogy az utolsó sor valamelyik (utolsótól különböző eleme) ne egyezzen meg egy másik elemmel ugyanabban az oszlopban. Működik azonban az n szerinti teljes indukció akkor, ha megfelelően általánosítjuk a feladat állítását: azt igazoljuk, hogy amennyiben egy $k \times n$ méretű táblázat mind a k sorában csupa különböző szám áll, továbbá egyetlen szám sem fordul elő n-nél többször a táblázatban, akkor lehetséges a sorokon belül úgy permutálni a számokat, hogy minden oszlopban csupa különböző szám álljon. Világos, hogy $n = 1$ esetén ez teljesül. Tegyük fel, hogy n-re már igazoltuk az állítást, és tekintsünk egy $k \times (n+1)$ méretű táblázatot. A célunk ekkor az, hogy az utolsó oszlopba úgy rendezzünk be különböző számokat, hogy az első n oszlopra teljesüljön az indukciós feltétel. Ehhez pedig mindössze azt kell elérni, hogy az utolsó oszlopban egyrészt csupa különböző szám álljon, másrészt pedig minden olyan szám, ami pontosan $(n+1)$-szer fordul elő a táblázatban, szerepeljen az utolsó oszlopban. A „szokásos” páros gráfot definiálva, a Hall-tételből könnyen látható, hogy egyrészt lehetséges az utolsó oszlopba csupa különböző számot becserélni, másrészt pedig lehetséges úgy

permutálni a sorokat, hogy minden olyan szám, ami $(n+1)$-szer szerepel a táblázatban, az utolsó oszlopban is előforduljon. Az indukciós lépés igazolásához azonban a két tulajdonság együttes fennállása szükséges. Ezt pedig a Mendelsohn–Dulmage tétel biztosítja, amely szerint ha egy G páros gráfban M_1 és M_2 párosítások (azaz közös végpont nélküli élek halmazai), akkor van olyan M párosítás is G-ben, amely fedi az A színosztály minden M_1 által fedett csúcsát és a B színosztály minden M_2 által fedett csúcsát.

4. Érdemes végül rámutatni egy másik, a feladathoz szorosan kapcsolódó kutatási területre. A Rota-sejtés azt állítja, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat minden mezejéhez egy-egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy az egy sorban álló vektorokból bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével, akkor a táblázat sorain belül lehetséges a vektorokat úgy permutálni, hogy minden oszlopra is teljesüljön, hogy bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével az adott oszlopban álló vektorokból. A versenyen kitűzött feladat felfogható a Rota-sejtés egy igen speciális eseteként. Hasonlóan a listaszínezési sejtéshez, jelenleg az általános Rota-sejtésre sem ismert bizonyítás.