Megmutatjuk, hogy nincsenek ilyen polinomok. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy

$$f(x)^3 - g(x)^2 = ax + b, \qquad \text{ahol} \ \ a \neq 0. \tag{2}$$

Ez a formula akkor volna jól kezelhető, ha a jobb oldalon teljes négyzet ellentettje állna. Ennek érdekében bevezetjük az y változót, és alkalmazzuk az $x = \big(-y^2 - b\big)/a$ helyettesítést. Ekkor

$$f(x) = f\left(\frac{-y^2 - b}{a}\right) = F\big(y^2\big), \quad \text{illetve} \quad g(x) = G\big(y^2\big)$$

teljesül alkalmas F és G polinomokra, ahonnan

$$F\big(y^2\big)^3 = G\big(y^2\big)^2 - y^2 = \big(G\big(y^2\big) - y\big) \cdot \big(G\big(y^2\big) + y\big) \tag{3}$$

adódik. A bal oldali polinom fokszáma 6-tal osztható, ezért G nem lehet konstans. Ha F konstans tagja 0, akkor ugyanez G-re is igaz. Ám ekkor a bal oldalon álló polinom legalacsonyabb fokú tagjának foka 6-tal osztható, míg a jobb oldalon álló esetében ez a fok pontosan 2. Ezért a G polinom nem konstans, de van konstans tagja. A jobb oldali két tényező relatív prím, hiszen ha egy polinom mindkettőt osztja, akkor a különbségüket és az összegüket, a $2y$ és a $2G\big(y^2\big)$ polinomokat is osztja, ám ez utóbbi polinomok relatív prímek, hisz $2G\big(y^2\big)$ konstans tagja nem nulla.

A valós együtthatós polinomok körében érvényes a számelmélet alaptétele, ezért (3) jobboldalának mindkét tényezője egy-egy valós együtthatós polinom köbének konstansszorosa. Mivel minden valós konstans előáll valós szám köbeként, azt kapjuk, hogy vannak olyan, valós együtthatós $p(y)$ és $q(y)$ polinomok, amelyekre

$$p(y)^3 = G\big(y^2\big) - y, \qquad \text{illetve} \qquad q(y)^3 = G\big(y^2\big) + y \tag{4}$$

teljesül. Láttuk, hogy G nem konstans. Ezért a (4) két jobb oldalán álló polinom legmagasabb fokú tagja megegyezik és legalább másodfokú. Ugyanez igaz tehát a két bal oldalon álló polinomra is: $p(y)$ és $q(y)$ legmagasabb fokú nemnulla tagja ugyanaz a cy^n monom, ahol $n \geq 1$. Ekkor azonban a

$$2y = q(y)^3 - p(y)^3 = \big(q(y) - p(y)\big) \cdot \big(q(y)^2 + q(y)p(y) + p(y)^2\big) \tag{5}$$

egyenlőség jobb oldalán a második tényezőben y^{2n} együtthatója $3c^2 \neq 0$, ezért a jobb oldal nem lehet elsőfokú. A kapott ellentmondás a megoldás elején kimondott állítást bizonyítja. □

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk, tegyük fel tehát, hogy

$$f(x)^3 = g(x)^2 + r(x), \quad \text{ahol } r(x) = ax + b \text{ és } a \neq 0. \tag{6}$$

Nyilván sem f, sem g nem lehet konstans, ezért $\deg f = 2k$ és $\deg g = 3k$ valamilyen pozitív egész k-ra. Legyen $d = \gcd(f, g)$. Ekkor persze $d^2 \mid f^3 - g^2 = r$, ám mivel r elsőfokú, d csak konstans lehet, vagyis f és g egymáshoz relatív prímek. Most (6) mindkét oldalát deriválva az

$$3f(x)^2 f'(x) = 2g(x)g'(x) + r' \tag{7}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan a (6) r'-szereséből kivonva a (7) r-szeresét,

$$f^2\big(fr' - 3f'r\big) = g\big(gr' - 2g'r\big)$$

adódik. A bal oldal osztható azzal az f^2 polinommal, amihez a jobb oldalon álló g relatív prím, tehát

$$f^2 \mid gr' - 2g'r. \tag{8}$$

Ekkor azonban $\deg f^2 = 4k$, míg $gr' - 2g'r$ foka legfeljebb $3k$. Ráadásul ha a g főegyütthatója d, akkor $(gr' - 2g'r)$-ben a $3k$-adfokú tag együtthatója

$$da - 6kda = (1 - 6k)da \neq 0.$$

Vagyis a $gr' - 2g'r$ polinom nem lehet a nulla polinom, és a foka pontosan $3k$.

Tehát a (8) szerint a $4k$-adfokú f^2 osztója a pontosan $3k$-adfokú, nemnulla $gr' - 2g'r$ polinomnak, ez pedig lehetetlen. □

Megjegyzések. 1. Vannak olyan nem konstans f és g polinomok, amelyekre $f^3 - g^2$ másodfokú, például $(x^2+2)^3 - (x^3+3x)^2 = 3x^2 + 8$. Igazolható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyrészt f és g relatív prímek, másrészt pedig ha a fokszámaik $\deg f = 2$ és $\deg g = 3$.

2. A feladat szorosan kapcsolódik az ún. abc-sejtéshez, ami az alábbit mondja ki. Minden pozitív ε-ra van olyan C_ε konstans, hogy ha a, b, c relatív prím pozitív egészek és $a + b = c$, akkor $c < C_\varepsilon \cdot \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$. Itt $\operatorname{rad}(n)$ az n *radikálját* jelöli, azaz az n különböző prímosztóinak szorzatát. (Pl. $\operatorname{rad}(2016) = 42$, $\operatorname{rad}(2017) = 2017$ és $\operatorname{rad}(2018) = 2018$.) Az abc-sejtésből számos nehéz tétel és sejtés következik. Levezethető belőle például a nagy Fermat-tételt általánosító Beal-sejtés gyengítése, miszerint

az $a^n + b^m = c^k$ egyenletnek csak véges sok olyan megoldása van a pozitív egészek körében, amelyre a, b, c relatív prímek és n, m, k mindegyike legalább 3. Az abc-sejtésre jelenleg nem ismert általánosan elfogadott bizonyítás. Ígéretes fejlemény azonban Mocsizuki Sinicsi japán matematikus 2012-ben publikált 500 oldalas munkája, amelyben egy egészen új elméletet dolgoz ki és bizonyít számos számelméletet érintő sejtést, többek között az abc-sejtést. Mocsizuki elmélete azonban annyira újszerű, hogy még jelenleg is tart annak ellenőrzése. Tekintettel arra, hogy az intenzív munka ellenére még nem találtak benne lényeges hibát, könnyen elképzelhető, hogy a közeli jövőben bejelentik a sejtés megoldását. Ha pedig ez megtörténik, valószínűleg semmi sem mentheti meg a szerzőt egy igen tekintélyes matematikai díjtól, ami persze nem lehet a Fields-érem, hiszen azt 40 év felettiek nem kaphatják.

Ismert és bizonyított azonban az abc-sejtésnek egy polinomos megfelelője, az ún. Mason-tétel. Jelölje $\mathrm{rad}(f)$ az f komplex együtthatós polinom különböző irreducibilis faktorainak szorzatát. (Tehát $\mathrm{rad}(f)$ foka az f különböző komplex gyökeinek száma.) Legyenek f, g és h olyan komplex együtthatós relatív prím polinomok, amelyek nem mindegyike konstans és $f + g = h$. Ekkor a Mason-tétel szerint

$$\max\big(\deg(f), \deg(g), \deg(h)\big) \le \deg\big(\mathrm{rad}(fgh)\big) - 1.$$

A Mason-tétel segítségével a kitűzött feladat könnyen megoldható. Tegyük fel tehát, hogy (5) teljesül. A II. megoldásban láttuk, hogy f, g relatív prímek, tehát f^3, g^2 és r is azok. Nyilván $\deg(f) = 2k$, $\deg(g) = 3k$ alkalmas k pozitív egészre. A Mason-tétel szerint ekkor

$$\begin{aligned} 6k = \max(6k, 6k, 1) &\le \deg\big(\mathrm{rad}(f^3g^2r)\big) - 1 = \deg\big(\mathrm{rad}(fgr)\big) - 1 \le \\ &\le \deg(fgr) - 1 = \deg(f) + \deg(g) + \deg(r) - 1 = 5k, \end{aligned}$$

ami ellentmondás, így (5) nem teljesülhet.