Legyenek Z_A, Z_B és Z_C rendre az AZ, BZ és CZ egyenesek metszéspontjai az ABC háromszög szemközti oldalával. Jelölje

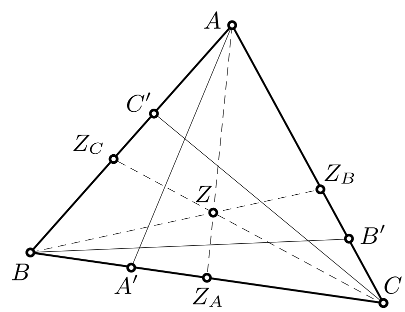
$$\alpha := \frac{BZ_A}{BC}, \quad \beta := \frac{CZ_B}{CA} \quad \text{és} \quad \gamma := \frac{AZ_C}{AB}$$

azt, hogy ezek a pontok milyen arányban osztják az egyes oldalakat. Ekkor

$$\frac{Z_AC}{BC} = \frac{BC - BZ_A}{BC} = 1 - \frac{BZ_A}{BC} = 1 - \alpha,$$

és hasonlóan

$$\frac{Z_BA}{CA} = 1 - \beta, \quad \text{illetve} \quad \frac{Z_CB}{AB} = 1 - \gamma.$$



A Ceva-tétel alapján

$$1 = \frac{BZ_A}{Z_AC} \cdot \frac{CZ_B}{Z_BA} \cdot \frac{AZ_C}{Z_CB} = \frac{BZ_A}{BC} \cdot \frac{BC}{Z_AC} \cdot \frac{CZ_B}{CA} \cdot \frac{CA}{Z_BA} \cdot \frac{AZ_C}{AB} \cdot \frac{AB}{Z_CB} =$$
$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

adódik, azaz

$$\alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma). \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt (esetleg elfajuló) háromszög pontosan akkor tartalmazza a Z pontot, ha vagy $BA' \leq BZ_A$ és $CB' \leq CZ_B$, valamint $AC' \leq AZ_C$ teljesül; vagy akkor, ha $BA' \geq BZ_A$, $CB' \geq CZ_B$ és $AC' \geq AZ_C$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy

$$p(Z) = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 2\alpha\beta\gamma = 2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),$$

az utóbbi egyenlőségek (1) miatt teljesülnek. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \quad \text{illetve}$$
$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} = \sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \leq \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3}$$

következik, ahonnan

$$2\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} + \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3} = 1$$

alapján $p(Z) \leq \dfrac{1}{4}$ adódik. Egyenlőség pedig akkor állhat, ha mindkét számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségnél egyenlőség áll, azaz ha $\alpha = \beta = \gamma$ teljesül. Ekkor azonban (1) miatt $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{2}$, azaz Z az ABC háromszög súlypontja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a súlypontra minden fenti becslés csakugyan egyenlőséggel teljesül. Ez pedig azt igazolja, hogy a feladat kérdésére a súlypont a válasz. □

Megjegyzés. A feladat könnyen megoldható a baricentrikus koordináták segítségével. Legyenek tehát α, β, γ az Z baricentrikus koordinátái, azaz $\overrightarrow{Z} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}$, ahol $\overrightarrow{X}$ jelöli az X ponthoz tartozó helyvektort és $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ekkor a

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

kifejezést kell maximalizálni. Márpedig a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \cdot 2\sqrt{\beta\gamma} \cdot 2\sqrt{\gamma\alpha} = 8\alpha\beta\gamma$$

adódik, ahonnan

$$p(Z) = 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} \leq 2 \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4}$$

következik, egyenlőség pedig kizárólag $\alpha = \beta = \gamma$ esetén áll. A kérdezett valószínűség tehát $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ esetén, azaz a súlypontra maximális.