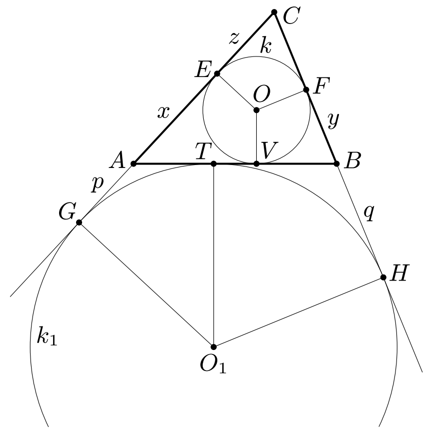
Először lássunk be egy segédtételt. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.




*1. ábra*

**Tétel.** *A háromszög beírt és hozzáírt körének egy oldalra eső érintési pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, tehát* $AT = VB$*.*

**Bizonyítás.** Legyen a háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölések szerint $a$, $b$, $c$, a beírt kör érintőszakaszainak hossza $x$, $y$, $z$, a hozzáírt kör érintőszakaszainak hossza $p$ és $q$, a háromszög kerülete $k$, és $s = \dfrac{k}{2}$.

$CG = CH$, mivel a $k_1$ körhöz $C$ pontból húzott érintőszakaszok.

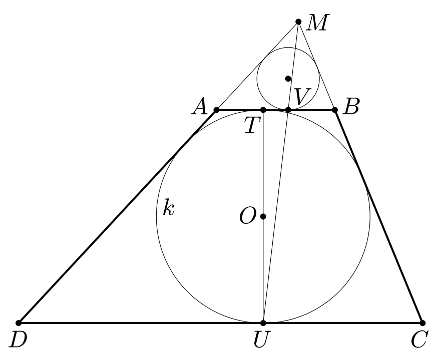
$CG + CH = CA + AT + TB + BC = k = 2s$, ezért $CG = CH = s$, amiből $AT = p = s - b$.

$2x + 2y + 2z = k$, vagyis $x + y + z = s$.

$BV = y = s - (x + z) = s - b$, tehát $AT = BV$.

Két esetre bontjuk a feladat bizonyítását.

*1. eset:* $AB < CD$. Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Legyen $k$ a beírt kör.



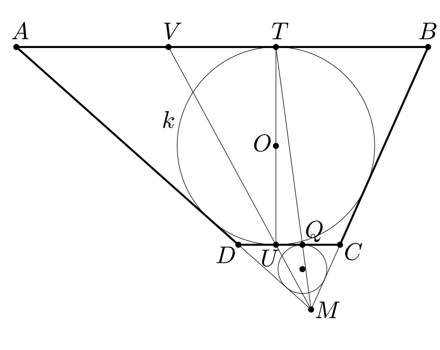

*2. ábra*

Ebben az esetben az $M$ metszéspont az $AB$ egyenes $C$ és $D$ pontokat nem tartalmazó oldalára esik. A $k$ kör az $MAB$ háromszög $AB$ oldalához írt köre.

Nagyítsuk az $ABM$ háromszöget az $M$ pontból $\lambda = \dfrac{MD}{MA}$ arányban. Ekkor az $MAB$ háromszög beírt köre $k$-ba megy át. Az $AB$ egyenes képe a $CD$ egyenes, hiszen $AB \parallel CD$ és $AB$ érinti a beírt kört, $CD$ pedig érinti $k$-t. A $V$ pont képe $U$ lesz, hiszen a pont és a képe, valamint $M$ egy egyenesen vannak, és $V$ rajta van az $AB$ egyenesen, így a képe rajta van a $CD$ egyenesen. Tehát az $AB$ egyenest az $MAB$ háromszög beírt köre a $V$ pontban érinti.

Használjuk a segédtételünket. A beírt kör érintési pontjának távolsága az egyik csúcstól egyenlő a hozzáírt kör távolságával a másik csúcstól, vagyis $AT = VB$.

*2. eset:* $AB > CD$. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit.



*3. ábra*

Most $M$ a $CD$ egyenes $A$ és $B$ pontot nem tartalmazó oldalán lesz. Ekkor $k$ az $MCD$ háromszög hozzáírt köre.

Nagyítsuk az $MCD$ háromszöget az $M$ pontból $\lambda = \dfrac{MA}{MD}$ arányban. Ekkor $MCD$ beírt köre $k$-ba megy át. A $CD$ egyenes képe az $AB$ egyenes lesz. Mivel $CD$ érinti a beírt kört, $AB$ pedig érinti $k$-t, az $U$ pont képe $V$, a $Q$ pont képe pedig $T$ lesz.

Pontosan akkor igaz, hogy $AT = VB$, ha $DQ = CU$. Utóbbi a segédtételünk értelmében igaz, így $AT = VB$ is teljesül.

Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ paralellogramma, azaz nem létezik az $M$ pont.

*Kerekes Anna* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
*Döbröntei Dávid Bence* (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12 évf.)
dolgozata alapján