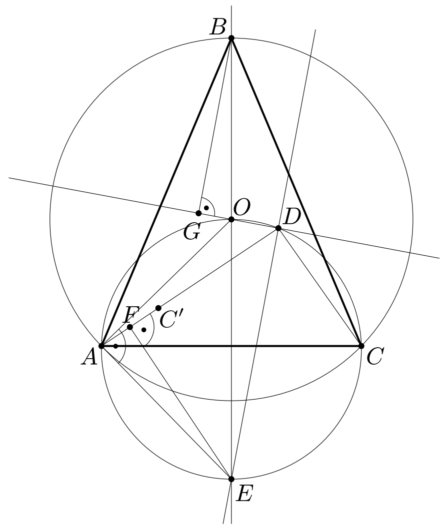
Legyen O az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja, és használjuk az *ábra* jelöléseit. A kerületi- és középponti szögek tétele miatt $ADC\sphericalangle = 2ABC\sphericalangle = AOC\sphericalangle$, ezért az A, C, D és O pontok egy körre illeszkednek. Az $AD = DC$ esetben $D = O$, az állítás triviális, ezért a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $AD > DC$.



Az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője az ADC kört az O-val átellenes E pontban metszi, ami felezi az AC ívet. A C pont DE-re vonatkozó C' tükörképe illeszkedik AD-re. Így $AE = CE = C'E$, s ezért az AC' szakasz F felezőpontjára $EFC'\sphericalangle = 90^\circ$ teljesül. Innen egyrészt a felezés miatt

$$DF = \frac{DC' + DA}{2} = \frac{DC + DA}{2},$$

másrészt definíció szerint $DF = DE \cdot \cos(FDE\sphericalangle)$.

Mivel OE átmérő, a Thalész-tétel miatt $ODE\sphericalangle = OAE\sphericalangle = 90^\circ$. A külső és a belső szögfelezők merőlegesek egymásra, így OD éppen a D-nél lévő külső szögfelező. Legyen G a B merőleges vetülete OD-n. A szimmetria miatt B, O és E kollineárisak, így az $ODE\triangle$ és a $OGB\triangle$ szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlóak. Ezt kihasználva

$$BG = \frac{BO}{OE} \cdot DE = \frac{AO}{OE} \cdot DE = \cos(AOE\sphericalangle) \cdot DE = \cos(FDE\sphericalangle) \cdot DE =$$
$$= \frac{DC + DA}{2},$$

amivel az állítást beláttuk.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)