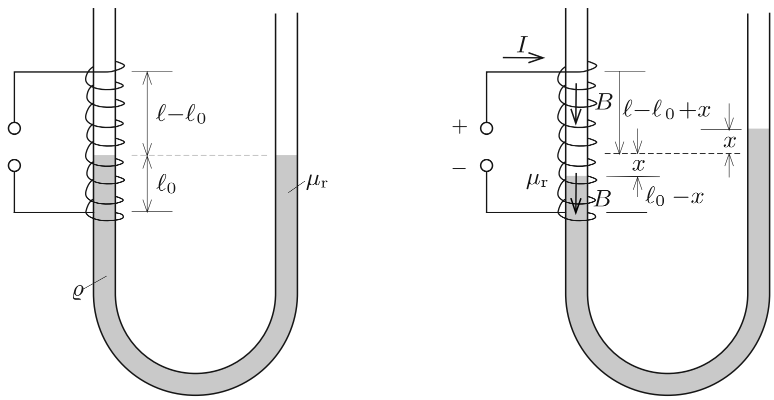
I. megoldás. Jelöljük az *ábrán* látható módon ℓ_0-lal azt a távolságot, amennyire a víz „belóg” a tekercsbe az áram bekapcsolása előtt, x-szel pedig azt, amennyivel lesüllyed a vízszint a tekercsben az áram bekapcsolása után.



A tekercsben (annak vízzel teli részében is és a levegőt tartalmazó részében is)

$$B(x)=\frac{NI\mu_0\mu_{\rm r}}{(\ell-\ell_0+x)\mu_{\rm r}+(\ell_0-x)}$$

nagyságú mágneses indukció alakul ki (lásd az idézett cikket). Ez az indukció látható módon függ az x távolságtól. A teljes (A keresztmetszetű) tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi(x)=NAB(x),$$

ami ugyancsak x függvénye. A fluxus kifejezhető a tekercs önindukciós együtthatójával is:

$$\Phi(x)=L(x)I.$$

Az áramjárta tekercs mágneses energiával rendelkezik, aminek nagysága

$$E_{\text{mágn.}}(x)=\frac{1}{2}LI(x)^2=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}ANI\cdot B(x), \tag{1}$$

vagyis

$$E_{\text{mágn.}}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{N^2I^2A\mu_0\mu_{\rm r}}{(\ell-\ell_0+x)\mu_{\rm r}+(\ell_0-x)}. \tag{2}$$

A folyadék gravitációs helyzeti energiája (az árammentes állapot azonos vízszintmagasságú állapotához viszonyítva)

$$E_{\text{helyzeti}}=\varrho gAx^2, \tag{3}$$

hiszen $m=\varrho Ax$ tömegű folyadékmennyiség tömegközéppontja x-szel magasabbra került.

Számítsuk most ki, hogy mennyit változna a rendszer mágneses, illetve gravitációs energiája, ha valamilyen ok miatt az x távolság egy kicsiny $\Delta x\ll x$ értékkel növekedne. A (2) képletből közvetlen számolással adódik:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mágn.}}&=E_{\text{mágn.}}(x+\Delta x)-E_{\text{mágn.}}(x)=\\&=\frac{N^2I^2A\mu_0\mu_{\rm r}(1-\mu_{\rm r})\Delta x}{2\big[(\ell-\ell_0+x+\Delta x)\mu_{\rm r}+(\ell_0-x-\Delta x)\big]\big[(\ell-\ell_0+x)\mu_{\rm r}+(\ell_0-x)\big]}\approx\\&\approx\frac{N^2I^2A\mu_0(1-\mu_{\rm r})\Delta x}{2\ell^2}.\end{aligned} \tag{4}$$

(Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy $\Delta x\ll x$ és $\mu_{\rm r}\approx 1$.) Ugyanezt az eredményt a differenciálszámítás alkalmazásával is megkaphatjuk:

$$\Delta E_{\text{mágn.}}\approx\frac{{\rm d}E_{\text{mágn.}}(x)}{{\rm d}x}\cdot\Delta x.$$

Mivel víznél $\mu_{\rm r}<1$ (a víz *diamágneses*), (4)-ből leolvasható, hogy a vízszint kicsiny lesüllyedésekor (vagyis $\Delta x>0$ esetén) a rendszer mágneses energiája *növekszik.*

Hasonló módon számíthatjuk ki a (3)-ból, hogy mennyit változna a víz helyzeti energiája, ha a vízszint valamilyen ok miatt egy kicsiny Δx értékkel lesüllyedne:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{helyzeti}} &= E_{\text{helyzeti}}(x+\Delta x) - E_{\text{helyzeti}}(x) = \\ &= \varrho g A \Delta x (2x + \Delta x) \approx 2\varrho g A x \cdot \Delta x,\end{aligned} \tag{5}$$

ami így is megkapható:

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} \approx \frac{\mathrm{d}E_{\text{helyzeti}}(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \Delta x.$$

Látható, hogy $x > 0$ és $\Delta x > 0$ esetén a folyadék helyzeti energiája is *növekszik.*

Vajon mi fedezné a rendszer mágneses és gravitációs helyzeti energiájának megváltozását, ha a vízszint Δx értékkel lesüllyedne? A vízszint elképzelt változásakor a tekercsen áthaladó mágneses fluxus

$$\Delta\Phi = I\Delta L$$

értékkel megváltozik, miközben az áramforrás (áramgenerátor) biztosítja, hogy az I áramerősség változatlan maradjon. A fluxusváltozás feszültséget indukál a tekercsben, emiatt az áramforrás feszültségének is meg kell növekednie

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

értékkel (ahol Δt az elképzelt változás ideje). Ilyen körülmények között az áramforrás több energiát ad le, mint amennyit korábban (a Joule-hő fedezésére) leadott, a különbség

$$W = UI\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} I \Delta t = I\Delta\Phi. \tag{6}$$

(6) és (1) összevetéséből látszik, hogy $W = 2\Delta E_{\text{mágn.}}$.

Egyensúly esetén az elképzelt (virtuális) vízszintváltozásnál teljesülnie kell a

$$W = \Delta E_{\text{mágn.}} + \Delta E_{\text{helyzeti}}$$

összefüggésnek. Ha a fenti összefüggés nem állna fenn, akkor valamilyen előjelű Δx mellett W nagyobb lenne, mint a rendszer mágneses és gravitációs energiájának megváltozása. A különbség fedezhetné a folyadék mozgási energiáját, és így a folyadék nem maradna egyensúlyban, hanem mozgásba jönne.

Az egyensúly feltétele tehát

$$W = 2\Delta E_{\text{mágn.}} = \Delta E_{\text{mágn.}} + \Delta E_{\text{helyzeti}},$$

ami (4) és (5) felhasználásával így írható:

$$\frac{N^2 I^2 A \mu_0 (1-\mu_{\mathrm{r}})\Delta x}{2\ell^2} = 2\varrho g A x \cdot \Delta x.$$

Innen a vízszint keresett megváltozása az áram hatására:

$$x = \frac{N^2 I^2 \mu_0 (1-\mu_{\mathrm{r}})}{4\ell^2 \varrho g}.$$

Mivel $x > 0$, a víz a tekercs belsejében egy kicsit lesüllyed.

Olosz Adél (Pécs, PTE. Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Szakgimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A vízszint mágneses mező okozta eltolódását a mágneses indukció nagysága határozza meg, és a vízszint egyensúlyi helyzete nem függ attól, hogy mi hozza létre a mágneses mezőt. Cseréljük fel a feladatban szereplő tekercset egy ugyanolyan geometriájú, rövidre zárt szupravezető tekerccsel, amiben ugyancsak I erősségű áram folyik az egyensúlyi állapotban. Ez a rendszer energetikailag zárt (hiszen nem kapcsolódik külső áramforráshoz), ezért az egyensúlyi állapotát az összes (mágneses + gravitációs) energia minimuma határozza meg.

A folyadék gravitációs helyzeti energiája (az I. megoldás jelöléseit használva)

$$E_{\text{helyzeti}}(x) = \varrho g A x^2.$$

A tekercs belsejében

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \tag{7}$$

indukciójú mágneses mező van, hiszen mind a levegő, mind pedig a víz relatív permeabilitása jó közelítéssel 1-nek tekinthető. A mágneses tér energiája az energiasűrűség $B^2/(2\mu_0\mu_\mathrm{r})$ képletből számolható. Mivel a tekercs $\ell_0 - x$ hosszú részét víz, $\ell - \ell_0 + x$ hosszú részét pedig levegő tölti ki, a mágneses energia:

$$E_{\text{mágn.}}(x) = \frac{B^2 A}{2\mu_0}\left(\frac{\ell_0 - x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})}} + \frac{\ell - \ell_0 + x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})}}\right).$$

Ebben a kifejezésben B a (7) összefüggéssel megadott mágneses indukció, ami szupravezető tekercs esetében (a mágneses fluxus állandósága miatt) nem függ x-től.

A rendszer teljes energiája

$$E(x) = E_{\text{helyzeti}}(x) + E_{\text{mágn.}}(x) = \varrho g A x^2 + \mu_0 \frac{N^2 I^2 A}{2\ell^2}\left(\frac{\ell_0 - x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})}} + \frac{\ell - \ell_0 + x}{\mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})}}\right).$$

Ez x-ben másodfokú kifejezés, aminek minimumát pl. teljes négyzetté alakítással, a parabola tulajdonságainak felhasználásával, esetleg deriválással határozhatjuk meg:

$$x = \mu_0 \frac{N^2 I^2 \left(\mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})} - \mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})}\right)}{4\ell^2 \varrho g \mu_\mathrm{r}^{(\text{víz})} \mu_\mathrm{r}^{(\text{levegő})}} \approx \mu_0 \frac{N^2 I^2 (1 - \mu_\mathrm{r})}{4\ell^2 \varrho g},$$

ahol $\mu_\mathrm{r} = 0{,}999\,992$ a víz relatív permeabilitása, a levegő $1{,}000\,000\,36$ értékű relatív permeabilitását pedig 1-gyel helyettesítettük.

Elek Péter (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján