

Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy párokba soroljuk az  $A$  parkettázásait. A következő jelölést használjuk: ha  $X$  és  $Y$  számhalmazok, akkor legyen

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ és } y \in Y\}.$$

Nyilván  $X + Y = Y + X$ , és az  $X$  halmaz  $s$ -sel való eltoltja ekkor  $X + \{s\}$ .

Legyen

$$A = (B + \{c_1\}) \cup (B + \{c_2\}) \cup (B + \{c_3\}) \cup \dots \cup (B + \{c_k\})$$

az  $A$  halmaz parkettázása. Ekkor  $A = B + C$ , ahol  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ ; legyen továbbá  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Így

$$A = C + B = (C + \{b_1\}) \cup (C + \{b_2\}) \cup (C + \{b_3\}) \cup \dots \cup (C + \{b_n\}).$$

Megmutatjuk, hogy ez is parkettázása  $A$ -nak, és különbözik az előbbtől.

A  $(C + \{b_i\})$  halmazok egymás eltoltjai, közös elemszámuk  $k$ , ami az első parkettázásban szereplő részhalmazok számaként legalább kettő. E halmazok száma,  $n$  pedig az első parkettázásban szereplő halmazok közös elemszáma, így szintén legalább kettő. A diszjunktság igazolásához indirekten tegyük fel, hogy például  $(C + \{b_1\})$ -nek és  $(C + \{b_2\})$ -nek közös eleme  $c_i + b_1 = c_j + b_2$ . Ekkor azonban ez a szám  $(B + c_i)$ -nek és  $(B + c_j)$ -nek is közös eleme; mivel e két halmaz az első parkettázásban szerepel, ez csak úgy lehetséges, hogy  $(B + c_i) = (B + c_j)$ , azaz  $i = j$ , így  $c_i = c_j$ , akkor viszont  $b_1 = b_2$ , ami ellentmondás. Nyilvánvaló, hogy miképpen e második parkettázást kaptuk az elsőből, ugyanazzal a megfeleltetéssel a másodiktól visszkapjuk az elsőt.

Ahhoz, hogy a parkettázások párosításáról beszélhessünk, végül be kell látnunk, hogy a párban álló parkettázások különböznek egymástól. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét; ekkor  $n = k$ , és a  $B$  elemeinek átszámozásával elérhető, hogy  $(B + c_v) = (C + b_v)$  teljesül  $v = 1, 2, \dots, n$ -re. Tekintsük például  $(B + c_1) = (C + b_1)$ -et:  $c_2 + b_1 \in (C + b_1)$  miatt ekkor van olyan  $b_i$  eleme  $B$ -nek, amelyre  $b_i + c_1 = c_2 + b_1$ . Ez a szám viszont közös eleme  $(B + c_1)$ -nek és  $(B + c_2)$ -nek, ami ellentmondás.