Nyilván

$$\begin{aligned} S_{100} &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{99}a_{100} = \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} + a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}), \end{aligned}$$

és ebből Yvett a 100. lépésben már csak az $a_{100}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99})$ részt tudja befolyásolni, ezért hogy $S_{100} = 0$ legyen,

$$a_{100} = -\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}$$

kimondása lehet részéről az észszerű lépés.

Ha $a_1+a_2+\ldots+a_{99} \neq 0$, akkor ezt meg is teheti; ezért aztán Xavérnak csak az lehet a célja, hogy ezt megakadályozza azzal, hogy a 99. lépésben az $a_{99} = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})$ számot mondja. De Yvett még ekkor is nyerhet, ha eléri, hogy ebben az esetben

$$S_{99} = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{98}a_{99} = 0$$

legyen, vagyis

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}) &= 0, \\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} + a_{99}(-a_{99}) &= 0, \\ a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2 &= 0, \\ -\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Itt válik el egymástól az *a*) és *b*) rész.

a) Valós számok esetén

$$\begin{aligned} 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\right) &= \\ = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2\right) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{98})^2 \end{aligned}$$

(nemnegatív, és) csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_{98} = 0$ esetén nulla.

Ekkor Yvett nem érheti el a célját, ha Xavér már valahol az elején mondott egy nemnulla számot, amit bőven megtehetett – ezért Xavérnak van nyerő stratégiája.

b) Komplex számok esetén viszont

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98} = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{98}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{97}a_{98}\right) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) + \\ + 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{96}a_{97}\right) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) + \\ + \left((a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

másodfokú egyenlet a_{98}-ra, aminek komplex gyökei

$$\begin{aligned} &a_{98_{1,2}} = \\ &= \frac{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97}) \pm \sqrt{-(a_1 + a_2 + \ldots + a_{97})^2 - 2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{97}^2\right)}}{2}. \end{aligned}$$

Ha e gyökök bármelyikét mondja Yvett a 98. lépésben, akkor ő fog nyerni, ezért ekkor Yvettnek van nyerő stratégiája.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)