a) Legyen az m tömegű, q töltésű golyó az 1. számú, a $2m$ tömegű, q töltésű a 2. számú, az $5m$ tömegű és $2q$ töltésű pedig a 3. számú test! Vizsgáljuk meg először, hogy mekkora erők hatnak az egyes testekre! Mivel a golyók kicsik, alkalmazhatjuk a ponttöltésekre vonatkozó Coulomb-féle erőtörvényt. A pozitív irányt az 1. testtől a 3. számú test irányába megválasztva rendre felírhatjuk az egyes testre ható eredő erőket a kezdeti helyzetben:

$$F_1 = -k\frac{q^2}{d^2} - k\frac{2q^2}{(2d)^2} = -k\frac{3q^2}{2d^2},$$
$$F_2 = k\frac{q^2}{d^2} - k\frac{2q^2}{d^2} = -k\frac{q^2}{d^2},$$
$$F_3 = k\frac{2q^2}{(2d)^2} + k\frac{2q^2}{d^2} = k\frac{5q^2}{2d^2}.$$

Mivel az indulást követő t_0 nagyon rövid, ezek az erők t_0 idő alatt állandónak tekinthetőek, és így az egyes testek sebessége rendre:

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{F_1 t_0}{m} = -k\frac{3q^2 t_0}{2d^2 m},$$
$$v_2 = \frac{I_2}{2m} = \frac{F_1 t_0}{2m} = -k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m},$$
$$v_3 = \frac{I_3}{5m} = \frac{F_1 t_0}{5m} = k\frac{q^2 t_0}{2d^2 m}.$$

(A lendületmegmaradás törvénye szerint $mv_1 + 2mv_2 + 5mv_3 = 0$, és ez valóban teljesül.)

Mivel az erők t_0 idő alatt jó közelítéssel állandóknak tekinthetők, a gyorsulások sem változhatnak ezen idő alatt. Így a golyók átlagsebessége a kezdeti és a t_0 időpontbeli „végsebesség” számtani közepe, amiből megkaphatjuk a testek elmozdulását:

$$r_1 = \frac{0+v_1}{2}t_0 = -k\frac{3q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$
$$r_2 = \frac{0+v_2}{2}t_0 = -k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m},$$
$$r_3 = \frac{0+v_3}{2}t_0 = k\frac{q^2 t_0^2}{4d^2 m}.$$

Ezekből számolható a golyók közötti távolság is:

$$d_{1,2} = d + |r_2 - r_1| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$
$$d_{2,3} = d + |r_3 - r_2| = d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right),$$
$$d_{3,1} = 2d + |r_3 - r_1| = 2d\left(1 + k\frac{q^2 t_0^2}{2d^3 m}\right).$$

b) Használjuk fel az előző részfeladat eredményeit! Látható, hogy kis t_0 idő elteltével az $1-2$ és $2-3$ testek távolságának aránya állandó maradt, hiszen:

$$\frac{d_{1,2}}{d_{2,3}} \equiv 1.$$

Ebből az is következik, hogy újabb kis Δt idő múlva is fenn fog állni ez az arány, mint ahogy az azután következő összes későbbi időpillanatra is. Ennek egyenes következménye, hogy a testek pillanatnyi sebességének aránya is mindvégig ugyanakkora lesz, és így a testek végsebességére (rendre u_1, u_2 és u_3) is fennáll, hogy:

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3 = (-3) : (-1) : (+1).$$

Ezek szerint a végsebességekre teljesül, hogy

$$u_1 = -3u_3 \qquad \text{és} \qquad u_2 = -u_3.$$

Emellett tudjuk, hogy nagyon hosszú idő múlva – amikor a kis golyók olyan távol lesznek, hogy már nem fejtenek ki egymásra számottevő erőt – az elektromos mező kezdeti energiája teljesen átalakul a golyók mozgási energiájává. Felírhatjuk a munkatételt:

$$k\frac{q^2}{d} + k\frac{2q^2}{2d} + k\frac{2q^2}{d} = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}(2m)u_2^2 + \frac{1}{2}(5m)u_3^2,$$

azaz

$$4k\frac{q^2}{d}=\frac{1}{2}m(3u_3)^2+\frac{1}{2}(2m)u_3^2+\frac{1}{2}(5m)u_3^2=8mu_3^2,$$

vagyis

$$u_3=\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}},\quad u_1=-3\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}},\quad u_2=-\sqrt{\frac{kq^2}{2dm}}.$$

Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A fenti gondolatmenet nem minden esetben, hanem csak a q_i töltések és az m_i tömegek bizonyos speciális értékeinél alkalmazható. A golyók távolságának aránya csak akkor marad időben állandó, ha fennáll, hogy

$$-\frac{q_1}{m_1}\left(q_2+\frac{1}{4}q_3\right)+\frac{q_3}{m_3}\left(q_2+\frac{1}{4}q_1\right)=2\frac{q_2}{m_2}(q_1-q_3).$$

A feladatban szereplő adatok mellett ez az összefüggés teljesül.

Általános esetben, tetszőleges tömeg- és töltésadatok mellett a feladat elemi eszközökkel nem oldható meg.

(G. P.)