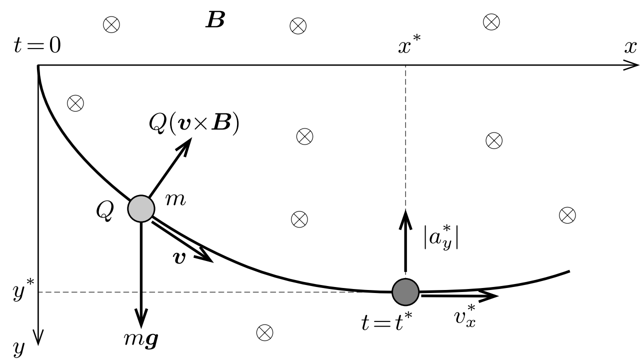
I. megoldás. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat. A mágneses indukció ugyancsak vízszintes irányú és az *ábrán* látható módon a papír síkjába befelé irányul. A kicsiny töltött test a koordináta-rendszer origójából indul, és a pályája – vázlatosan – az ábrán látható görbe. (A mozgás nyilván az $x-y$ síkban történik, így elegendő ezt vizsgálnunk.)



A „földi laboratórium” kifejezés arra utal, hogy a testre ható erők között a mágneses Lorentz-erő mellett a nehézségi erőt is figyelembe kell vennünk. A testre ható erő komponensei:

$$F_x = Qv_yB, \tag{1}$$

$$F_y = mg - Qv_xB, \tag{2}$$

ahol

$$v_x = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad v_y = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

a test sebességének megfelelő derékszögű összetevői.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$F_x = ma_x \qquad \text{és} \qquad F_y = ma_y,$$

ahol

$$a_x = \frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad y_y = \frac{\Delta v_y(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

Behelyettesítve az erőkomponenseket a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$a_x = \omega_0 v_y, \tag{5}$$

és

$$a_y = g - \omega_0 v_x, \tag{6}$$

ahol

$$\omega_0 = \frac{QB}{m} \tag{7}$$

egy körfrekvencia dimenziójú állandó.

Megjegyzés. Ezt a mennyiséget „ciklotronfrekvenciának” nevezik, mert ilyen körfrekvenciával mozog a ciklotronokban egy Q/m fajlagos töltésű részecske a B indukciójú homogén mágneses mezőben.

Felírhatjuk még a munkatételt a töltött részecske mozgására az indulás pillanata és egy tetszőleges későbbi pillanat között. Mivel a Lorentz-erő merőleges a sebességre, tehát nem végez munkát, elegendő a nehézségi erő munkavégzésével számolnunk:

$$\frac{1}{2}m\big(v_x(t)^2 + v_y(t)^2\big) = mgy(t). \tag{8}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a függőleges elmozdulás (y^*) maximális. Mivel ilyenkor a függőleges irányú sebesség éppen nulla, a vízszintes irányú sebességkomponensre fennáll:

$$v_x^* = \sqrt{2gy^*}. \tag{9}$$

a) és *b*) Írjuk fel az (5) egyenletet a kicsiny sebesség- és elmozdulás-megváltozásokkal, majd összegezzük ezeket a megváltozásokat a mozgás kezdetétől a pálya legmélyebb pontjáig:

$$\frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} = \omega_0 \frac{\Delta y(t)}{\Delta t},$$
$$\sum \Delta v_x(t) = \omega_0 \sum \Delta y(t),$$

ahonnan

$$v_x^* = \omega_0 y^* \tag{10}$$

adódik. Összevetve ezt az eredményt a munkatételből kapott (9) összefüggéssel, válaszolhatunk az első két alkérdésre. A test legnagyobb sebessége

$$|\boldsymbol{v}| = v_x^* = \frac{2g}{\omega_0} = \frac{2mg}{QB},$$

a legmélyebb süllyedése pedig (az indulási magassághoz viszonyítva):

$$y^* = \frac{2g}{\omega_0^2} = \frac{2gm^2}{Q^2B^2}.$$

c) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a vízszintes irányú (6) mozgásegyenlettel, ami

$$\Delta v_y(t) = g\Delta t - \omega_0 \Delta x(t)$$

alakban is felírható. Összegezve a mozgás kezdetétől a legmélyebb pontba érkezés t^* időpillanatáig, amikor a vízszintes irányú elmozdulás x^*, a függőleges irányú sebesség pedig nulla:

$$0 = gt^* - \omega_0 x^*,$$

ahonnan a mozgás ezen szakaszára vonatkoztatott átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{x^*}{t^*} = \frac{g}{\omega_0} = \frac{mg}{QB}.$$

Mivel a vízszintes irányú mozgás a $0 < x(t) < x^*$ intervallumon történő mozgás ismétlődése, az egész mozgás átlagsebessége (x^*-nál sokkal hosszabb úton) ugyancsak $mg/(QB)$.

d) A pálya legmélyebb pontjánál a test gyorsulása (6) szerint:

$$a_y^* = g - \omega_0 v_x^*,$$

ami (7) és a v_x^*-re kapott kifejezés alapján:

$$a_y^* = g - \frac{QB}{m}\frac{2mg}{QB} = g - 2g = -g.$$

A töltött test tehát éppen a nehézségi gyorsulással megegyezően gyorsul függőlegesen *felfelé.*

Illés Gergely (Eger, Szilágyi Erzsébet Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tekintsünk egy olyan koordináta-rendszert, amely az indukcióvonalakra merőlegesen, vízszintes irányban $\boldsymbol{v}_0$ sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerhez képest. Ha a töltött test pillanatnyi sebessége a „mozgó” rendszerben $\boldsymbol{v}$, akkor a laboratóriumi rendszerben a sebessége $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0$, így a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m\boldsymbol{a} = Q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0) \times \boldsymbol{B} + m\boldsymbol{g},$$

amit

$$m\boldsymbol{a} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + [m\boldsymbol{g} + Q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}] \tag{11}$$

alakban is felírhatunk. A fenti képletben $\boldsymbol{a}$ a test gyorsulása, ami a laboratóriumi rendszerben ugyanaz a vektor, mint az egyenletesen mozgó másik koordináta-rendszerben a gyorsulás.

A (11) egyenlet szögletes zárójelében szereplő két vektor ugyanolyan (függőleges) irányú, és ha $\boldsymbol{v}_0$ nagyságát megfelelően, nevezetesen $v_0 = mg/(QB)$ módon választjuk, a két tag éppen kiejtheti egymást. Ekkor a mozgásegyenlet olyan, mintha a test súlytalan lenne, és csak a mágneses Lorentz-erő hatása alatt mozogna. Úgy is mondhatjuk, hogy a mozgó rendszerben megjelenik egy $E = Bv_0$ nagyságú homogén, függőlegesen felfelé irányuló elektromos mező, aminek hatása kiegyenlíti az mg nagyságú, függőlegesen lefelé mutató nehézségi erőt.

Jól ismert, hogy homogén mágneses mezőben a mágneses erővonalakra merőleges kezdősebességgel rendelkező részecske pályája kör, és a részecske a kör mentén $\omega_0 = QB/m$ körfrekvenciával egyenletesen mozog. Jelen esetben is ez valósul meg, hiszen a test kezdősebessége a laboratóriumi rendszerben nulla, a mozgó rendszerben tehát v_0 nagyságú. A körpálya sugara

$$R = \frac{v_0}{\omega_0} = \left(\frac{m}{QB}\right)^2 g$$

lesz. A mozgás – a laboratóriumi rendszerből nézve – egy v_0 sebességű egyenletes mozgás és egy v_0 kerületi sebességű körmozgás szuperpozíciója. A pálya alakja ezek szerint *ciklois*.

a) A test sebessége a pálya legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb, ugyanis itt lesz egymással párhuzamos és egyirányú a kétféle mozgáshoz tartozó sebességvektor:

$$v_{\max} = 2v_0 = 2\frac{mg}{QB}.$$

b) A test legnagyobb lesüllyedése a kezdőponthoz képest

$$\Delta h = 2R = 2\left(\frac{m}{QB}\right)^2 g.$$

c) A test sebessége a vízszintes irányú, állandó v_0 nagyságú sebességnek és a körmozgásból adódó, a nulla körül ingadozó sebességnek a vektori összege. Az eredő (hosszú időtartamra vonatkoztatott) átlagsebesség tehát v_0 nagyságú, vízszintes és a mágneses erővonalakra is merőleges irányú vektor lesz.

d) A test gyorsulása csak a körmozgásból adódik, nagysága a pálya minden pontjában

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \left(\frac{mg}{QB}\right)^2 \cdot \left(\frac{QB}{m}\right)^2 \frac{1}{g} = g$$

nagyságú. A gyorsulás iránya a mozgás kezdetekor függőlegesen lefelé, a pálya legmélyebb pontjában pedig függőlegesen felfelé mutat.

Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, és induljunk ki a vízszintes és a függőleges irányokra vonatkozó (5) és (6) mozgásegyenletből. Az (5) egyenlet, amit $a_x - \omega_0 v_y = 0$ alakban is felírhatunk, azt fejezi ki, hogy a $v_x(t) - \omega_0 y(t)$ mennyiség változási üteme (deriváltja) nulla, tehát ez a kifejezés *időben állandó.* Az állandó (mivel a kezdőpillanatban v_x is és y is nulla) nulla kell hogy legyen, vagyis

$$v_x(t) = \omega_0 y(t). \tag{12}$$

Helyettesítsük be v_x-et a függőleges irányú mozgásra vonatkozó (6) egyenletbe:

$$a_y(t) = g - \omega_0^2 y(t),$$

amit

$$a_y(t) = -\omega_0^2\big(y(t) - y_0\big) \tag{13}$$

alakban is felírhatunk, ahol $y_0 = g/\omega_0^2$.

Felismerhetjük, hogy (13) egy olyan rugóra akasztott súlyos test mozgásegyenlete, amely test saját súlya alatt a rugó megnyúlása y_0, és a rezgés körfrekvenciája ω_0. A harmonikus rezgőmozgás ismert képleteiből (az $y(0) = 0$ és $v_y(0) = 0$ kezdőfeltételeket is figyelembe véve) könnyen megkaphatjuk, hogy

$$y(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t),$$
$$v_y(t) = \frac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$
$$a_y(t) = g\cos\omega_0 t.$$

Ezekből (12) segítségével rögtön adódik, hogy

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega_0}(1 - \cos\omega_0 t),$$

ennek változási üteme pedig

$$a_x(t) = g\sin\omega_0 t.$$

Az $x(t)$-t úgy kapjuk meg, hogy olyan függvényt keresünk, aminek változási üteme $v_x(t)$, és a kezdőpillanatban nulla értékű:

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(\omega_0 t - \sin \omega_0 t).$$

A fenti képletekből a feladat valamennyi kérdésére könnyen megkapjuk a választ: a test legnagyobb sebessége $2g/\omega_0$, legnagyobb lesüllyedése $2g/\omega_0^2$, a mozgás átlagsebessége g/ω_0, és a gyorsulása a pálya legalsó pontjában (és minden más helyes is) g.

Megjegyzés. Mindhárom megoldásban a newtoni mechanika nemrelativisztikus mozgásegyenletéből indultunk ki. Ez csak akkor jogos, ha $v_{\max} \ll c$, vagyis $mg \ll QBc$. Ez sokkal erősebb megszorítás, mint a feladat szövegében szereplő $mg < QBc$.

(G. P.)