Tegyük fel, hogy ℓ_1 jelöli a rövidebb rúd hosszát, vagyis $\ell_1 < \ell_2$. Az egydimenziós mozgásban szereplő sebességeket tekinthetjük előjeles számoknak, ezzel a sebességvektorok nagysága mellett az irányukat is kifejezhetjük.

A feladatban hivatkozott cikk említi, hogy alkalmasan választott vonatkoztatási rendszerben az ütközési felület a különböző hosszúságú rudak esetében is (egy bizonyos ideig) mozdulatlan lesz. Keressük meg ezt az „alkalmasan választott" vonatkoztatási rendszert! Jelöljük ezen vonatkoztatási rendszer talajhoz viszonyított sebességét u-val! Miután a rudak ütköznek, a lökéshullámok a két rúdban (a rudak végpontjaihoz viszonyítva) azonos sebességgel kezdenek terjedni. Emiatt, amikor a hullám az ℓ_1 hosszú rúd végére ér, akkor a másik rúdban is ℓ_1 hosszú utat tett meg, a rúd maradék része pedig még eredeti, v_2 sebességével halad. Azok a részek, amelyeken a lökéshullám áthaladt, az ütközési felülethez képest mozdulatlanok, vagyis talajhoz rögzített rendszerből szemlélve u sebességgel haladnak. Ezek a testek zárt rendszert alkotnak, így a lendületmegmaradás törvénye szerint

$$\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2 = 2\ell_1 u + (\ell_2 - \ell_1)\, v_2, \quad \text{vagyis} \quad u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Kihasználtuk, hogy a rudak tömege a hosszúságukkal arányos, és az arányossági tényező (a rúd keresztmetszetének és sűrűségének szorzata) kiesik a képletekből.

Az ütközési felület tehát ekkora u sebességgel halad az ütközés során. Az ilyen sebességgel haladó koordinátarendszerből nézve az ℓ_1 hosszú rúd kezdeti sebessége $v_1 - u$, az ütközés utáni sebessége pedig értelemszerűen ennek ellentettje, $u - v_1$ lesz. (Az ütközési felület ebből a rendszerből nézve mozdulatlan, vagyis a merev fallal való ütközéshez hasonló helyzet alakul ki.) A talajhoz rögzített rendszerből nézve a rövidebb rúd ütközés utáni sebessége:

$$v_1' = u - v_1 + u = 2u - v_1 = 2 \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} - v_1 = v_2.$$

Az ütközési számot (annak egyik definíciója szerint) úgy kaphatjuk meg, hogy a tömegközépponti rendszerben kiszámítjuk *valamelyik* test ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát (annak abszolút értékét). Az ütközés után az ℓ_1 hosszúságú rúd minden egyes pontjának ugyanakkora a sebessége, a rúdban nem maradtak feszültségek (ez nem áll fenn az ℓ_2 hosszúságú rúdra), így egyszerűbb a rövidebb rudat vizsgálnunk. Az ütközési szám kiszámításához tehát meg kell nézni, mekkora sebességgel haladt a rövidebb rúd az ütközés előtt és után a tömegközépponti rendszerben.

A tömegközéppont sebessége:

$$u_{\mathrm{tk}} = \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ℓ_1 hosszú rúd sebessége tehát a tömegközépponti rendszerben az ütközés előtt:

$$v_{1,\mathrm{tk}} = v_1 - u_{\mathrm{tk}} = v_1 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2) v_1 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2 (v_1 - v_2)}{\ell_1 + \ell_2},$$

az ütközés után pedig:

$$v_{1,\mathrm{tk}}' = v_1' - u_{\mathrm{tk}} = v_2 - \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{(\ell_1 + \ell_2) v_2 - \ell_1 v_1 - \ell_2 v_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_1 (v_2 - v_1)}{\ell_1 + \ell_2}.$$

Az ütközési szám a fenti két sebesség hányadosának abszolút értékével egyenlő:

$$k = \left| \frac{v_{1,\mathrm{tk}}'}{v_{1,\mathrm{tk}}} \right| = \left| \frac{\ell_1 (v_2 - v_1)}{\ell_2 (v_1 - v_2)} \right| = \left| -\frac{\ell_1}{\ell_2} \right| = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Az ütközési szám tehát a rövidebb és a hosszabb rúd hosszának hányadosa. (Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a hosszabb rúd ütközés utáni és ütközés előtti lendületének hányadosát számoljuk ki a tömegközépponti rendszerben.)

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)