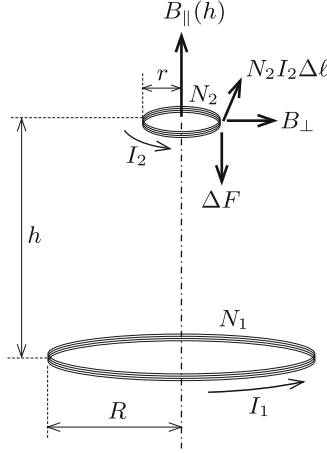


A két tekercs között ható erő vonzó hatású, ha a két áram ( $I_1$  és  $I_2$ ) körüljárási iránya megegyezik, ellenkező esetben pedig ugyanakkora nagyságú, de taszító. A továbbiakban három különböző megoldást mutatunk a feladatra.

**I. megoldás.** Az elrendezés forgásszimmetriája miatt a két tekercs között ható eredő erő a szimmetriatengellyel párhuzamos, így elegendő csak az ilyen irányú erőket összegeznünk.

A nagy tekercs által a kis tekercs helyén létrehozott mágneses térnek tengelyirányú  $B_{\parallel}$  komponense, illetve radiálisan kifelé mutató  $B_{\perp}$  komponense van (1. ábra). Vegyük észre, hogy a  $\Delta \mathbf{F} = I \cdot \Delta \ell \times \mathbf{B}$  képlet szerint tengelyirányú erőt csak  $B_{\perp}$  okoz, azaz feladatunk ennek a komponensnek a meghatározása.



1. ábra

Ismeretes, de a Biot–Savart-törvény segítségével könnyen le is vezethető (ettől itt most eltekintünk), hogy a nagy tekercs által a tengely mentén, a tekercs középpontjától  $h$  távolságban keltett mágneses indukció nagysága

$$B_{\parallel}(h) = \frac{\mu_0}{2} I_1 N_1 R^2 (h^2 + R^2)^{-3/2}.$$

Vegyük fel egy igen kicsiny  $\Delta h$  magasságú,  $r$  sugarú hengerfelületet (koaxiálisan) a kis tekercs köré (2. ábra). Tekintettel arra, hogy  $r \ll R$  és  $\Delta h \ll h$ , a mágneses indukció nagysága a henger alap- és fedőlapján, illetve az oldalpalást mentén állandónak vehető. A henger felső lapján a mágneses indukció nagysága egy kicsiny  $\Delta B$ -vel különbözik az alaplap menti indukciótól:

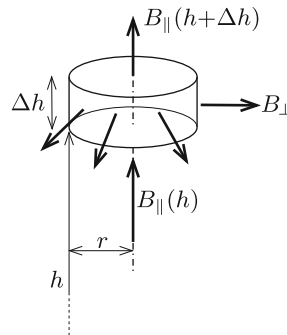
$$B_{\parallel}(h + \Delta h) = B_{\parallel}(h) + \Delta B_{\parallel},$$

emiatt a körlapokon be- és kilépő mágneses fluxus nem egyezik meg. A teljes (zárt) hengerfelületen kilépő összes mágneses fluxus viszont (a mágneses tér forrásmentessége miatt) nulla:

$$B_{\parallel}(h + \Delta h) r^2 \pi - B_{\parallel}(h) r^2 \pi + 2r\pi \Delta h B_{\perp} = 0,$$

ahonnan megkapható a számunkra érdekes (sugárirányú) komponens:

$$B_{\perp} = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B_{\parallel}}{\Delta h} \approx \frac{3}{4} \mu_0 I_1 N_1 R^2 r h (h^2 + R^2)^{-5/2}.$$



2. ábra

*Megjegyzés.* Az utolsó lépés jogosságát a kicsiny mennyiségek hányadosának differenciálhányadossal történő közelítésével láthatjuk be:

$$\frac{\Delta B_{\parallel}}{\Delta h} \approx B'_{\parallel}(h),$$

de a Newton-féle  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$  (ha  $\varepsilon \ll 1$ ) közelítő képlet is eredményre vezet:

$$\begin{aligned} [(h + \Delta h)^2 + R^2]^{-\frac{3}{2}} &\approx (h^2 + 2h\Delta h + R^2)^{-3/2} \approx (h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2h\Delta h}{h^2 + R^2}\right)^{-3/2} \approx \\ &\approx (h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2h\Delta h}{h^2 + R^2}\right) = (h^2 + R^2)^{-3/2} - 3h\Delta h (h^2 + R^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

A kis tekercsre ható eredő erő (kihasználva, hogy a tekercs minden pontjában  $\Delta\ell$  merőleges  $\mathbf{B}_\perp$ -re):

$$F = \sum \Delta F = I_2 N_2 B_\perp \sum \Delta\ell = \frac{3}{2} \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h (h^2 + R^2)^{-5/2} \pi.$$

**II. megoldás.** Mivel a két tekercs egyforma nagyságú erőt fejt ki egymásra, a feladat megoldáshoz számolhatjuk a kis tekercs által a nagy tekercsre kifejtett erőt is.

Mínt hogy  $r \ll R$ , a kis tekercs mágneses tere közelíthető egy

$$m = I_2 N_2 \cdot r^2 \pi$$

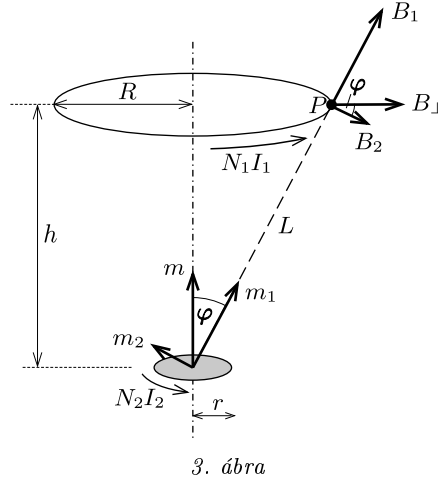
nyomatékú mágneses dipólus terével.

Bontsuk fel az  $\mathbf{m}$  vektort két komponensre a 3. ábrán látható módon. Az egyes komponensek által létrehozott mágneses indukcióvektorok nagyságát ( $B_1$ , illetve  $B_2$ ) és irányát könnyen meghatározhatjuk a dipólustól  $L = \sqrt{h^2 + R^2}$  távol lévő  $P$  pontban, hiszen ezek a Gauss-féle főhelyzeteknek felelnek meg.  $B_1$  nagysága az I. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére eső pontokra) vonatkozó ismert képlet (lásd az I. megoldást) alapján:

$$B_1 = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi} \frac{1}{L^3} = \frac{\mu_1 m \cos \varphi}{2\pi} (h^2 + R^2)^{-3/2}.$$

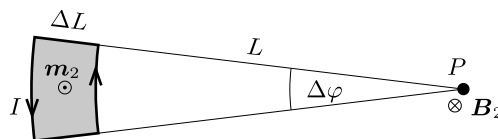
$B_2$  nagysága a II. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére merőleges síkban elhelyezkedő pontokra) vonatkozó képlet alapján:

$$B_2 = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi} \frac{1}{L^3} = \frac{\mu_1 m \sin \varphi}{4\pi} (h^2 + R^2)^{-3/2}.$$



*Megjegyzés.* A II. főhelyzetben a mágneses indukció  $\mathbf{B}_2$  vektora ellentétes irányú az  $\mathbf{m}_2$  dipólnyomatékkal, az I. főhelyzetben viszont  $\mathbf{B}_1$  és  $\mathbf{m}_1$  azonos irányú vektorok.  $B_2$  nagysága – ugyanakkora  $L$  távolság és ugyanakkora dipólnyomaték esetén – éppen fele  $B_1$ -nek. Mindezt pl. a Biot–Savart-törvény alkalmazásával láthatjuk be, ha azt a 4. ábrán látható kicsiny, áramjárta körvezető, vagyis az  $m_2 = IL\Delta\varphi\Delta L$  nyomatékú mágneses dipól  $P$  pontbeli terének kiszámítására használjuk. A mágneses indukcióhoz csak a két kis körív árama ad járulékot, és az eredő tér nagysága:

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{L\Delta\varphi}{L^2} - \frac{(L + \Delta L)\Delta\varphi}{(L + \Delta L)^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I \Delta\varphi}{4\pi} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L + \Delta L} \right) \approx \\ &\approx \frac{\mu_0 I \Delta\varphi \Delta L}{4\pi L^2} = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi} \frac{1}{L^3}. \end{aligned}$$



4. ábra

A 3. ábra alapján a keresett radiális indukciókomponens nagysága

$$\begin{aligned} B_{\perp} &= B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 m}{\pi} (h^2 + R^2)^{-3/2} \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \frac{3}{4} \frac{\mu_0 m}{\pi} (h^2 + R^2)^{-3/2} \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{3\mu_0}{4} I_2 N_2 R r^2 h (h^2 + R^2)^{-5/2}, \end{aligned}$$

és végül a nagy tekercsre ható erő:

$$F = 2R\pi I_1 N_1 B_{\perp} = \frac{3}{2} \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h (h^2 + R^2)^{-5/2} \pi.$$

**III. megoldás.** A feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Legyen a két tekercs önindukciós állandója rendre  $L_1$  és  $L_2$ , a kölcsönös indukciós együtthatójuk pedig  $M$ . (A kölcsönös indukcióról és a mágneses tér energiájáról lásd még *Gnädig Péter: A kölcsönös indukció* c. cikket a KöMaL 2001. évi 2. számában, illetve *Szász Krisztián: Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása* c. cikket a KöMaL 2011. évi 9. számában és a KöMaL honlapján. – A Szerk.)

A két lapos tekercs kölcsönös indukciós együtthatóját könnyen meghatározhatjuk, ha a nagy tekercs által létrehozott mágneses indukcióvektort a kis tekercs által határolt körlapon állandónak tekintjük. (Ez a feltevés  $r \ll R$  miatt jogos.) A kis tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi_{1,2} = N_2 r^2 \pi B_{\parallel}(h) = \frac{\mu_0 \pi}{2} I_1 N_1 N_2 R^2 r^2 (h^2 + R^2)^{-3/2},$$

és így a kölcsönös indukciós együttható:

$$M(h) = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi}{2} N_1 N_2 R^2 r^2 (h^2 + R^2)^{-3/2}.$$

Látható, hogy a kölcsönös indukciós együttható függ a tekercsek távolságától, míg az önindukciós együtthatók nyilván függetlenek  $h$ -tól.

A rendszer mágneses terének energiáját az

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

kifejezés írja le. Ha a két tekercs közötti távolságot egy kicsiny  $\Delta h$  értékkel megnöveljük, miközben  $F$  nagyságú húzóerőt fejtünk ki, akkor  $W = F \Delta h > 0$  munkát végzünk. Eközben a rendszer mágneses terének energiája

$$\Delta E = I_1 I_2 \Delta M(h)$$

értékkel megváltozik. Első gondolatunk az lehet, hogy a munkatétel szerint

$$\Delta E = W, \quad \text{vagyis} \quad F = \frac{\Delta E}{\Delta h}.$$

Ez azonban nem lehet igaz, hiszen  $h$  növelésekor  $E(h)$  csökken, így  $\Delta E < 0$  nem egyezhet meg a  $W > 0$  munkával.

A hiba forrása a következő: miközben a tekercseket eltávolítjuk egymástól, a bennük folyó áramot csak külső feszültségforrások segítségével tarthatjuk állandó értéken, és ezen feszültségforrások által leadott energiát nem vettük figyelembe az energiamérleg felírásánál. Ha a munkatételt helyesen akarjuk alkalmazni, akkor vagy ki kell számítani a külső áramforrások energialeadását, vagy – egy „trükk” alkalmazásával – energetikailag zárttá kell tennünk a rendszert. A továbbiakban a második módszert követjük.

A tekercseket, amelyekben kezdetben  $I_1$  és  $I_2$  áram folyt, oly mértékben lehűthetjük, hogy szupravezetőkké váljanak. Ekkor az áramok fenntartásához nincs szükség külső feszültségforrásra, tehát a tekercsek kivezetéseit akár rövidre is zárhatjuk. A tekercsek között ható erő nyilván csak az áramok nagyságától függ, attól nem, hogy milyen hőmérsékletűek (milyen vezetőképességűek) a vezetékek.

Távolítsuk el gondolatban a két lehűtött (szupravezetővé tett) tekercset egymástól egy kicsiny  $\Delta h$  távolsággal. A rendszer most energetikailag zárt, tehát az általunk végzett  $W = F \Delta h$  munka a mágneses energia  $\Delta E$  megváltozásával lesz egyenlő. Mivel a szupravezető tekercsek mágneses fluxusa nem változhat meg (ellenkező esetben feszültség indukálna, és az „végtelen nagy” áramot indítana el bennük), a tekercsek eltávolítása közben nemcsak  $M$ , hanem  $I_1$  és  $I_2$  is változni fog. A tekercsek fluxusa, vagyis

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2, \quad \text{illetve} \quad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

állandó marad, vagyis

$$L_1 \cdot \Delta I_1 + I_2 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_2 = 0,$$

továbbá

$$L_2 \cdot \Delta I_2 + I_1 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_1 = 0.$$

Ha a fenti egyenletek bal oldalának  $I_1$ , illetve  $I_2$ -szőrösét kivonjuk a mágneses energia

$$\Delta E = L_1 I_1 \Delta I_1 + L_2 I_2 \Delta I_2 + I_1 I_1 \Delta M + M(I_1 \Delta I_2 + I_2 \Delta I_1)$$

megváltozásából, azt kapjuk, hogy

$$\Delta E = -I_1 I_1 \Delta M > 0.$$

(A helyes eredmény csak egy előjelben tér el a naiv, hibás gondolatmenet eredményétől.)

A kölcsönös indukciós együttható kicsiny megváltozását az I. megoldásban alkalmazott módon (differenciálszámítással, vagy a Newton-formula alkalmazásával) számíthatjuk ki:

$$\Delta M = -\frac{3\pi}{2} \mu_0 N_1 N_2 R^2 r^2 h (h^2 + R^2)^{-5/2} \Delta h,$$

és így a keresett vonzóerő:

$$F = -I_1 I_2 \frac{\Delta M}{\Delta h} = +\frac{3\pi}{2} \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h (h^2 + R^2)^{-5/2}.$$

*Marozsák Tóbiás* (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)