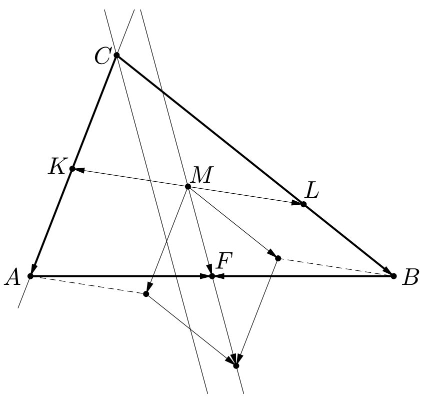
**Megoldás.** A feladat megoldása három jól elkülöníthető, önmagában is figyelemre érdemes lépésre bontható. Ezeket külön segédállításokként fogalmazzuk meg, ahol lehetséges, többféle indoklást is mutatunk.

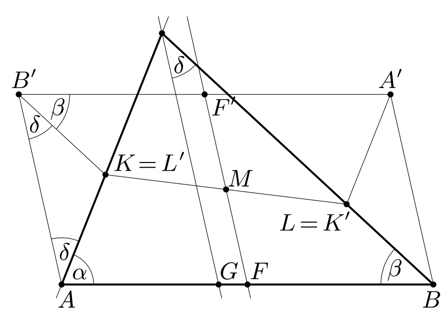
**1. segédállítás.** *Ha az $ABC$ háromszög $AC$ és $BC$ oldalain felvett $K$ és $L$ pontokra $AK = BL$, akkor az $AB$ és $KL$ szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével.*

**1. bizonyítás** (vektorokkal, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Az $AB$ szakasz felezőpontja legyen $F$, a $KL$ szakaszé pedig $M$. A vektorok összeadásának definíciója szerint $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BF}$. Ebből, felhasználva, hogy $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{ML}$ és $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{BF}$, kapjuk, hogy $2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB}$. A feltétel szerint $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{LB}|$, így a vektorösszeadást paralelogramma-módszerrel végezve egy rombuszt kapunk, aminek $2\overrightarrow{MF}$ átlója valóban felezi a $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{LB}$ vektorok szögét, ahogy állítottuk (*1. ábra*). $\square$




*1. ábra*

**2. bizonyítás** (elemi szögszámítással, *Daróczi Sándor* (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.) megoldása). Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Tükrözzük az $ABLK$ négyszöget és az $F$ pontot középpontosan az $M$-re, így kapjuk az $A'$, $B'$, $L'$ és $K'$, valamint $F'$ pontokat. A tükrözés miatt $ABA'B'$ paralelogramma, aminek $FF'$ középvonala, így $AFF'B'$ is paralelogramma; valamint $KB'A'\sphericalangle = \beta$. Továbbá $AK = BL = B'L'$ miatt a $B'AK\triangle$ egyenlőszárú, így $B'AK\sphericalangle = KB'A\sphericalangle = \delta$. Mivel $\alpha+\beta < 180°$, $K$ az $ABA'B'$ paralelogramma belső pontja, és a 2. ábra helyes. Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha+\beta+2\delta$ egyenesszög, mivel egy paralelogramma egy szárán fekvő két szög összege. Ebből következik, hogy az $ABC\triangle$-ben $C\sphericalangle = 2\delta$, amiből $CG$ szögfelezése miatt $GCB\sphericalangle = \delta$. A tükrözés miatt $B'K \parallel BL = BC$, amiből $GCB\sphericalangle = AB'K\sphericalangle$ miatt $CG \parallel B'A \parallel F'F$, amivel az állítást beláttuk. $\square$

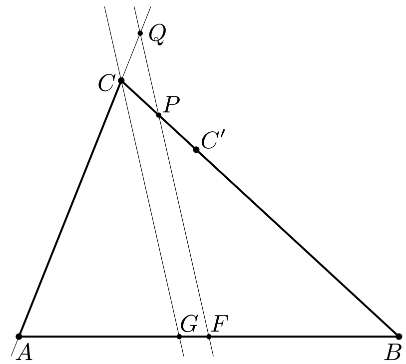



*2. ábra*

*Megjegyzés.* Az első, vektorokat használó megoldásból kitűnik, hogy nem szükséges feltennünk, hogy $K$ és $L$ a háromszög oldalainak egy-egy pontja, elegendő, hogy az oldalegyeneseken vannak, és $AK = BL$. Azonban attól függően, hogy $K$ és $L$ melyik $A$-hoz illetve $B$-hez tartozó félegyenesre kerül, változhat, hogy a $C\sphericalangle$ melyik szögfelezőjével lesz párhuzamos az $FM$ egyenes.

**2. segédállítás.** *Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának felezőpontja legyen $F$, és $F$-en keresztül húzzuk meg a $BCA\sphericalangle$ szög (belső) szögfelezőjével párhuzamos $e$ egyenest. Ekkor az $e$ egyenes felezi az $ABC\triangle$ kerületét.*

**1. bizonyítás** (az 1. segédállításból közvetlenül). Az $a = b$ eset triviális, így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > b$, és használjuk a *3. ábra* jelöléseit. Legyen $C'$ a $BC$ oldal azon pontja, amelyre $BC' = AC$, továbbá legyen $P$ a $CC'$ szakasz felezőpontja. Alkalmazzuk az 1. segédállítást a $K = C$ és $L = C'$ pontokra. Kapjuk, hogy a $PF$ egyenes párhuzamos a $CG$ szögfelezővel, azaz $PF = e$. Az $AF = FB$, $AC = BC'$ és $C'P = PC$ nyilvánvaló egyenlőségekből adódik az állítás. $\square$




*3. ábra*

**2. bizonyítás** (szögfelező-tételből, *Győrffy Ágoston* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Ismét feltesszük, hogy $a > b$. A szögfelező-tétel szerint egy háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, azaz $AG/GB = b/a$. Innen arányos osztással $GB = ca/(a+b)$ azonnal adódik. Az $ABC\sphericalangle$-ben felírhatjuk a párhuzamos szelők tételét a $CG$ szögfelezőre és az $e$ egyenesre – a $P$ pontot most $e \cap BC$-ként definiáljuk:

$$\frac{BF}{BG} = \frac{BP}{BC}.$$

Innen

$$BP = \frac{c/2}{ca/(a+b)} \cdot a = \frac{a+b}{2},$$

és végül $BF + BP = c/2 + (a+b)/2 = k/2$ valóban a kerület fele, ahogy állítottuk. $\square$

**3. bizonyítás** (Menelaosz-tételből). Továbbra is feltesszük, hogy $a > b$. Messe $e$ a $BC$-t $P$-ben, az $AC$-t pedig $Q$-ban a 3. ábra szerint. Mivel $e$ párhuzamos a $CG$ szögfelezővel, $PQC\sphericalangle = GCA\sphericalangle = GCB\sphericalangle = CPQ\sphericalangle$, azaz $PQC\triangle$ egyenlőszárú. Írjuk fel a Menelaosz-tételt az $ABC\triangle$-re és az $e$ egyenesre:

$$AF \cdot BP \cdot CQ = BF \cdot AQ \cdot CP.$$

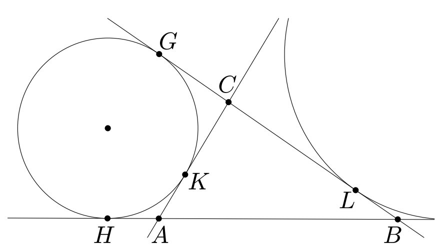
Az $AF = BF$ és $PC = CQ$ egyszerűsítések után $AQ = BP$ adódik, amiből $PC = CQ = x$ jelöléssel $a - x = b + x$, és $x = (a-b)/2$ következik. Így $FA + AC + CP = c/2 + b + (a-b)/2 = k/2$, ahogy állítottuk. $\square$

**3. segédállítás.** *Az $ABC$ háromszög $AC$, illetve $BC$ oldalaihoz írt köröknek az oldalakon levő érintési pontjai rendre $K$ és $L$. Ekkor $AK = BL$.*

**Bizonyítás.** Az állítás jól ismert, a teljesség kedvéért közöljük a bizonyítását. A szokásos jelöléseket használjuk, $s = (a+b+c)/2$ az $ABC\triangle$ félkerülete. Az $AC$ oldalhoz írt kör érintési pontjai az $AB$ és $BC$ oldalegyeneseken legyenek rendre $H$ és $G$. Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, azért $CG = CK$, $AH = AK$ és $BG = BH$. Ezeket felhasználva

$$BH + BG = BA + AH + BC + CG = BA + AK + BC + CK = a + b + c = 2s,$$

így $BH = s$, és $AK = AH = BH - BA = s - c$ adódik. Hasonló számolással $BL = s - c$, amiből az állítás következik. $\square$




*4. ábra*

**A B. 4843. feladat megoldása.** A három segédállításból a feladat állítása azonnal következik. A 3. segédállítás szerint $AK = BL$. Ezután az 1. segédállítás miatt a $KL$ és $AB$ szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjével, végül a 2. segédállítás szerint felezi a háromszög kerületét. $\square$