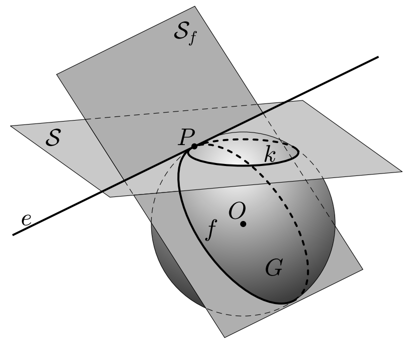
Megoldás. Jelölje a gömbfelületet G, középpontját O. Messük el G-t egy O-ra nem illeszkedő $\mathcal{S}$ síkkal, így kapjuk az $\mathcal{S} \cap G = k$ körvonalat. Az $\mathcal{S}$ a G-t két részre osztja, a kisebbiket az $\mathcal{S}$-hez (vagy k-hoz) tartozó gömbsapkának nevezzük (hozzáértve a gömbsapkához magát k-t is). A gömbsapkára gondolhatunk úgy is, mint a k által meghatározott körlapra a G gömbfelületen.



Legyen $P \in k$ tetszőleges, és érintse az $e \subset \mathcal{S}$ egyenes a k kört P-ben. Az O és e által feszített $\mathcal{S}_f$ sík a G-t egy f főkörben metszi. Azt mondjuk, hogy G-n az f a k körvonal P-ben húzott érintője. Világos, hogy G-n a k-hoz annak minden pontjában pontosan egy érintőt húzhatunk.

Legyen a k kör O-ra vonatkozó tükörképe k', és vegyünk egy tetszőleges $X \in G$ pontot, amely nem eleme sem a k-hoz, sem a k'-höz tartozó gömbsapkának. Megmutatjuk, hogy k-nak pontosan két érintője tartalmazza X-et. Messe ugyanis OX az $\mathcal{S}$ síkot az X' pontban. Az X-re tett feltevés miatt X' a k körön kívül van, azaz X'-ből k-hoz pontosan két érintő egyenes húzható: e_1 és e_2. (Ha $OX \parallel \mathcal{S}$ (ekkor az X' pont nem létezik), akkor e_1 és e_2 legyenek k azon érintőegyenesei $\mathcal{S}$-ben, amelyek párhuzamosak OX-szel, ezekből is pontosan kettő van.) Világos, hogy az O és e_1, valamint az O és e_2 által feszített síkok k olyan érintő főköreit metszik ki G-ből, amelyek tartalmazzák X-et. A gondolatmenetből az is kitűnik, hogy más, X-re illeszkedő főkör nem érintheti k-t.

Most válasszunk két, k_1 és k_2 kört a G gömbön úgy, hogy a hozzájuk, valamint k_1' és k_2' tükörképeikhez tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak legyenek. Tekintsük k_1 és k_2 összes érintő főkörét. Azt állítjuk, hogy ezek együttesen eleget tesznek a kívánalmaknak. Legyen A a gömbfelszín tetszőleges pontja. Mivel a k_1, k_2, k_1' és k_2' körökhöz tartozó gömbsapkák páronként diszjunktak, így A-ból k_1 és k_2 valamelyikéhez biztosan húzható érintő főkör, tehát az összes érintők lefedik A-t. Másrészt mind k_1-hez, mind k_2-höz legfeljebb 2 érintő főkör húzható A-ból, így A-t legfeljebb 4 kiválasztott főkör tartalmazza. Ezzel a konstrukció helyességét beláttuk.

Megjegyzések. 1. A megoldás első részében leírtak a gömbi geometria közismert állításai.

2. A következő állítás lényegében a síkbeli megfelelője a feladatnak: a sík lefedhető egyenesekkel úgy, hogy minden pontot legfeljebb 4 egyenes tartalmaz, és nincs az egyenesek között 5 darab párhuzamos. Két diszjunkt kör összes érintői itt is triviálisan megfelelnek. Ebből a feladatunk állítását megkaphatjuk: ha a síkot a gömb egyik érintősíkjának választjuk, és a síkon megadott egyeneseket a gömb középpontjából a gömbfelszínre vetítjük, egy jó konstrukciót kapunk. A technikai részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk. (Például miért fontos, hogy ne legyen az egyenesek között 5 párhuzamos?)