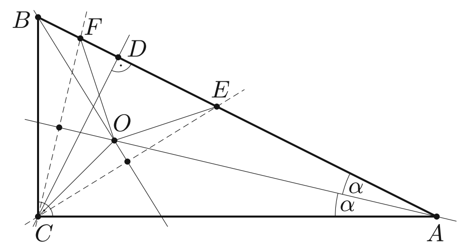
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a két kör középpontja egybeesik. Jelölje 2α az ABC háromszög A-nál lévő szögét, O pedig a háromszög szögfelezőinek metszéspontját. Mivel a merőleges szárú hegyesszögek egyenlőek, ezért $CAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 2\alpha$ (*1. ábra*), tehát

$$FCA\sphericalangle = FCD\sphericalangle + DCA\sphericalangle = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Az AFC háromszögben a szögek összege 180°, tehát

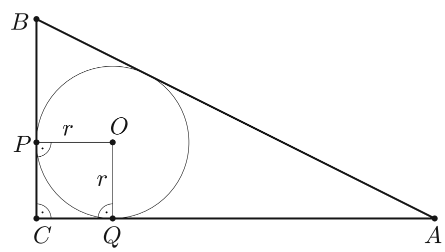
$$AFC\sphericalangle = 180^\circ - (FCA\sphericalangle + CAF\sphericalangle) = 90^\circ - \alpha.$$

Ezért az AFC háromszög egyenlőszárú, amiből következik, hogy szárszögének szögfelezője merőleges az alapjára. Tehát CF szakaszfelező merőlegese az AO egyenes. Ugyanígy kapjuk, hogy CE szakaszfelező merőlegese pedig a BO egyenes. Mivel két oldalfelező merőleges metszéspontja meghatározza a CEF háromszög körülírt körének középpontját, ezért az egybeesik O-val.



1. ábra

Jelölje P, illetve Q az ABC háromszög beírt körének a befogókon lévő érintési pontjait (*2. ábra*). Mivel bármely külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $CP = CQ$. Nyilván teljesül $OP = OQ$ is, tehát a $CPOQ$ négyszög deltoid. Kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, továbbá $PCQ\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a deltoidnak van három derékszöge, tehát téglalap is. Ha viszont egy deltoid téglalap, akkor az négyzet.



2. ábra

A két kör sugarainak keresett aránya tehát megegyezik a $CPOQ$ négyzet OP oldalának és OC átlójának arányával, azaz $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.