I. megoldás. Úgy látjuk be az állítás helyességét, hogy megadunk egy „algoritmust” egy ilyen n-jegyű szám elkészítéséhez.

Nézzük meg az első néhány megoldást:

$$\begin{aligned}
n=1 &\quad\longrightarrow & 2 &= 2\cdot 1;\\
n=2 &\quad\longrightarrow & 12 &= 2^2\cdot 3;\\
n=3 &\quad\longrightarrow & 112 &= 2^3\cdot 14;\\
n=4 &\quad\longrightarrow & 2\,112 &= 2^4\cdot 132;\\
n=5 &\quad\longrightarrow & 22\,112 &= 2^5\cdot 691;\\
n=6 &\quad\longrightarrow & 122\,112 &= 2^6\cdot 1908.
\end{aligned}$$

Megfigyelhető a következő szabályszerűség: ha a 2^n-nel való osztás eredménye páratlan szám, akkor 1-es, ha pedig páros szám, akkor 2-es számjegy kerül az előző szám elé.

Bebizonyítjuk, hogy ha továbbra is ezt az eljárást követjük, akkor a keletkező $n+1$-jegyű szám mindig osztható lesz 2^{n+1}-nel.

$n\geq 6$ esetén az előzőleg már megkapott n-jegyű szám 2^n-nel való osztásakor vagy páratlan, vagy páros számot kapunk.

I. eset: páratlan számot kapunk. Ekkor írjunk 1-et a szám elé. Az új szám $A=(10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú, vagyis

$$A=2^n\cdot 5^n+2^n(2l+1)=2^n(5^n+2l+1).$$

Mivel 5^n+2l+1 páros szám, ezért $2^{n+1}\mid A$ teljesül.

II. eset: páros számot kapunk. Ekkor írjunk 2-est a szám elé. Az új szám ekkor $B=(2\cdot 10^n+n\text{-jegyű szám})$ alakú:

$$B=2\cdot 2^n\cdot 5^n+2^n\cdot 2k=2^n(2\cdot 5^n+2k).$$

Mivel $2\cdot 5^n+2k$ páros szám, ezért $2^{n+1}\mid B$ teljesül.

Adtunk egy eljárást, amellyel minden n pozitív egész szám esetén készíthető olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.

II. megoldás. 2^n darab olyan n-jegyű szám van, amely csak 1-esből és 2-esből áll (mert minden helyiértékre két szám közül választhatunk).

Az összes ilyen n-jegyű számot elosztva rendre 2^n-nel legfeljebb 2^n darab különböző maradékot kaphatunk az osztás eredményeként (éspedig: $0;1;2;\ldots;2^n-1$). Belátjuk, hogy minden ilyen n-jegyű szám különböző maradékot ad 2^n-nel osztva.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van két különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja 2^n-nel osztva. Így a két szám különbsége (a nagyobbikból a kisebbet kivonva) osztható lesz 2^n-nel.

Ez a különbség legfeljebb n-jegyű szám lehet, melynek az „első” nem 0 számjegye (az 1-es helyiértéktől indulva a nagyobbak felé) vagy 1-es (a $2-1$ miatt), vagy 9-es (az $1-2$ miatt). Így ez a különbségként kapott szám $A\cdot 10^k$ alakú lesz, ahol A egy páratlan természetes szám, míg k a 0-k száma az (1-es helyiértéktől indulva) első 1-es vagy 9-es jegyig.

Mivel a különbség legfeljebb n-jegyű, a fentiek alapján legfeljebb $(n-1)$ darab 0-ra végződhet, azaz a különbség legfeljebb 2^{n-1}-gyel osztható (hiszen $10^{n-1}=2^{n-1}\cdot 5^{n-1}$). Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nincs két olyan különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n-jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja a 2^n-nel való osztásnál. Vagyis minden maradék különböző.

Figyelembe véve, hogy pontosan 2^n darab, a feltételeknek megfelelő n-jegyű szám van, így pontosan 2^n darab különböző maradékunk van, vagyis van (pontosan egy darab) olyan n-jegyű szám, amely csupa 1-esből és 2-esből áll és 2^n-nel való osztási maradéka 0 – és ezt akartuk bizonyítani.