Az űrhajó mozgását érdemes három szakaszra osztani:

i) A „klasszikus" szakaszra (amikor az űrhajó sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél, és így számolhatunk a newtoni fizika képleteivel;

ii) a „simán" relativisztikus mozgásra (amikor az űrhajó sebessége megközelíti a fénysebességet);

iii) és végül az „ultrarelativisztikus" szakaszra (amely során a fénysebességtől való eltérés elhanyagolhatóan kicsi).

Megmutatjuk, hogy a klasszikus szakasz kb. 26 napig tart, a relativisztikus (a kapitány nézőpontjából) kb. 5 napig, és végül az ultrarelativisztikus szakasz (ismét a kapitány nézőpontjából) mindössze néhány óráig. A kérdéses idő (a kapitány öregedése) tehát összesen 31 nap.

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni, hogy még a klasszikus szakasz vége előtt, kb. két héttel az indulás után minden ember életét vesztené az űrhajón, mert ekkor az űrhajó gyorsulása már $10\,g$-nél is nagyobb, és a továbbiakban még növekszik. Ilyen körülmények között a szív nem tudja tartósan vérrel ellátni az agyat; ekkora gyorsulásnál még a vadászpilóták is pár perc után elájulnak. Emiatt a kapitány öregedése helyett inkább arra a kérdésre kereshetünk választ, hogy mit mutat az űrhajóban egy óra, esetleg egy gyorsulásálló robotkapitány számítógépének belső órája.

Az m (nyugalmi) tömegű űrhajó a 2. kozmikus sebességgel, $v_0 = 11{,}2$ km/s kezdősebességgel hagyja el a Földet. Nem tudjuk, hogy az űrhajó milyen ütemben változtatja a sebességét (elképzelhető, hogy folyamatosan, exponenciálisan nő mozgási energiája), de becslésre az is megfelel, ha feltesszük, hogy minden nap egyszer pillanatszerűen kétszeresére növeli a mozgási energiáját, majd 1 napig állandó sebességgel halad.

Ha az űrhajó sebessége a fénysebességhez képest $\beta = v/c$, és a földi megfigyelő számára 1 napig ezzel a sebességgel mozog, akkor kapitány számára ezalatt

$$t' = (1\text{ nap})\sqrt{1-\beta^2} < 1\text{ nap}$$

idő telik el. (Ez az időkülönbség, az ún. idődilatáció jelensége a relativitáselmélet egyik furcsasága.) Az űrhajó összes (mozgási+nyugalmi) energiája ennél a sebességnél:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \cdot \frac{1\text{ nap}}{t'}. \tag{1}$$

i) A klasszikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája viszonylag kicsi nyugalmi energiához képest: ekkor az idő még „normálisan" (a földi megfigyelőével kb. megegyező módon) telik a kapitány (és „legénység", valamint a fedélzeti számítógépek) számára. A klasszikus szakasz felső határát (kicsit önkényesen) pl. a nyugalmi energia $\frac{1}{25}$ részénél húzhatjuk meg, vagyis

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{25}mc^2.$$

A szakasz legnagyobb sebessége $v_1 = 8{,}5 \cdot 10^4$ km/s, aminek eléréséhez szükséges (napokban számolt) időt a

$$v_1^2 = 2^t \cdot v_0^2$$

egyenletből számíthatjuk ki, és $t = 25{,}8$ nap adódik.

ii) A relativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája összemérhető (azonos nagyságrendű) a nyugalmi energiával, emiatt a relativisztikus képleteket kell használni. Becslésnek megfelel, ha azt mondjuk, hogy a mozgási energia ebben a szakaszban legyen $\frac{1}{25}mc^2$ és $25\,mc^2$ közötti érték. Ez 625-szörös növekedés, aminek 2-es alapú logaritmusa 9,2. Tehát a földi megfigyelő kb. 9 nap alatt „látja" az űrhajó mozgásának klasszikusból ultrarelativisztikusba való átmenetét. Mennyi időt mér ezalatt a hajó belső órája (mennyit öregszik a kapitány)?

A relativisztikus szakasz i-edik napján az (1) összefüggés felhasználásával

$$t_i' = (1\text{ nap}) \cdot \sqrt{1-\beta_i^2}\text{ nap} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{25}\right)^i}\text{ nap},$$

a teljes szakaszon pedig

$$\begin{aligned} T' &= t_1' + t_2' + \ldots + t_9' = \\ &= \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}16} + \frac{1}{1{,}32} + \frac{1}{1{,}64} + \frac{1}{2{,}28} + \frac{1}{3{,}56} + \frac{1}{6{,}12} + \frac{1}{11{,}24} \approx 5{,}1\text{ nap} \end{aligned}$$

telik el az űrhajóban.

iii) Az ultrarelativisztikus szakaszban az űrhajó mozgási energiája jóval nagyobb a nyugalmi energiájánál: az űrhajó „összes energiáját" gyakorlatilag teljesen az előbbi teszi ki. Mivel a mozgási energia naponta duplázódik, minden nap fele olyan hosszúnak érződik kapitány számára, mint az előző. Ez egy 1/2-es szorzójú, elég („végtelen") hosszú mértani sor, aminek összege az első elem kétszerese. Mivel az első napon

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = 25\,mc^2,$$

$$t' = \frac{1\ \text{nap}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{1}{25}\text{ nap} \approx 1\text{ óra},$$

az összes további időtartam összege ennek kétszerese, vagyis kb. 2 óra.

A földi indulástól számítva tehát az Alpha Centauri (vagy bármilyen más, nagyon távoli csillag) eléréséig összesen kb. 31 nap telik el.

Fajszi Bulcsú (Bp., Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján