

a) Jelöljük a $2m$ tömeget M -mel, és a két testre jellemző fizikai mennyiségeket (sebesség, gyorsulás, erő) különbözőssük meg a tömegüknek megfelelő indexszel. Írjuk fel az energiamegmaradás törvényét a rúd vízszintes és függőleges helyzetének megfelelő állapotokra! (A helyzeti energiát a tengely alatt $2L$ mélységben választjuk nullának.)

$$(1) \quad Mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2.$$

A sebességeket kifejezhetjük a rúd szögsebességével:

$$v_m = L\omega, \quad v_M = 2L\omega,$$

és így (1)-ből a szögsebességet, abból pedig a kerületi sebességeket is kiszámíthatjuk:

$$2mg \cdot 2L + mg \cdot 2L = mg \cdot 3L + \frac{1}{2}m\omega^2 L^2 + \frac{1}{2}2m\omega^2(2L)^2,$$

vagyis

$$(2) \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3L}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{2Lg}{3}}, \quad v_M = \sqrt{\frac{8Lg}{3}}.$$

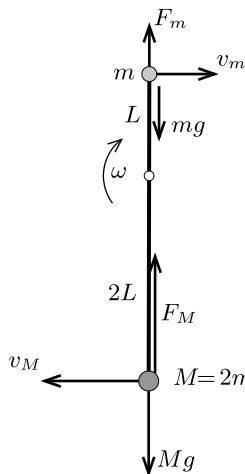
b) Jelöljük a függőleges helyzetű rúd által a kis testekre kifejtett erőket F_m -mel és F_M -mel, a gyorsulásokat pedig a_m -mel és a_M -mel (lásd az 1. ábrát). Ezeket a mennyiségeket függőlegesen felfelé mutató irányban fogjuk pozitívnak tekinteni. A mozgásegyenletek:

$$F_m - mg = ma_m, \quad F_M - Mg = Ma_M.$$

Mivel $a_m = -L\omega^2$ és $a_M = 2L\omega^2$, a szögsebesség korábban kiszámított értékének felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_m = mg - mL\frac{2g}{3L} = \frac{1}{3}mg, \quad \text{illetve} \quad F_M = 2mg + 2m(2L)\frac{2g}{3L} = \frac{14}{3}mg.$$

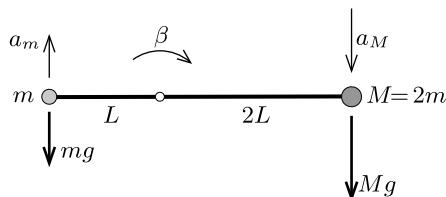
A két test összesen $F_m + F_M = 5mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé mutató erővel hat a rúdra (függőlegesen lefelé), és mivel a rúd tömege elhanyagolható, ugyanekkora erőt fejt ki a rúd a tengelyre.



1. ábra

c) A rúd vízszintes helyzetében (közvetlenül az elengedése után) a nehézségi erők eredő forgatónyomatéka a tengelyre vonatkoztatva (lásd a 2. ábrát):

$$M_{\text{eredő}} = M_M - M_m = 2mg \cdot (2L) - mgL = 3mgL.$$



2. ábra

A forgatónyomaték hatására a rúd

$$\beta = \frac{M_{\text{eredő}}}{\Theta}$$

szöggyorsulással kezd elfordulni a tengely körül, ahol

$$\Theta = \Theta_m + \Theta_M = mL^2 + M(2L)^2 = 9mL^2$$

a rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka. Ezek szerint

$$\beta = \frac{g}{3L}, \quad \text{továbbá} \quad a_m = L\beta = \frac{1}{3}g, \quad a_M = 2L\beta = \frac{2}{3}g.$$

Balaskó Dominik (Sopron, Széchenyi I. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A rúd függőleges helyzetében a testek gyorsulása is és a rájuk ható nehézségi erő is függőleges, tehát a rúd által kifejtett erők is függőlegesek (rúdirányúak). Vízszintes helyzetnél viszont a rúd függőleges irányú erőket fejt ki a végeihez rögzített testekre, tehát a rúdban ható erő általában *nem rúdirányú*.

(G. P.)