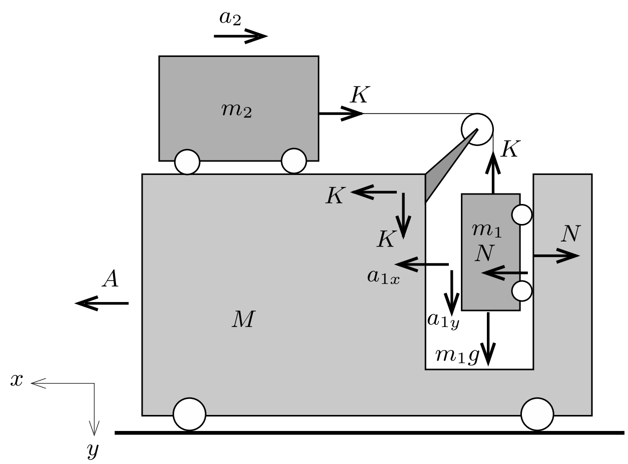
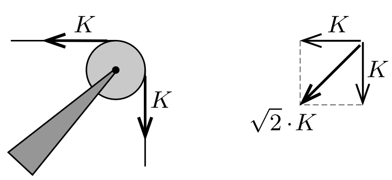
a) Az m_1 és m_2 tömegű testekre, valamint a M tömegű kiskocsira ható (számunkra fontos) erőket az *1. ábrán* tüntettük fel. Ezek az m_1 tömegű test esetében az $m_1 g$ nehézségi erő, a K kötélerő és az M tömegű test által kifejtett N nyomóerő. Az m_2 tömegű test függőleges irányban biztosan nem mozdul el, a vízszintes irányú mozgását pedig egyedül a K kötélerő határozza meg. Az M tömegű test függőleges irányban szintén nem mozdul el, így elegendő a rá ható vízszintes erőkkel foglalkoznunk. Két ilyen erő van: az m_1 tömegű testre ható N erő ellenereje és a kötél által a csigára gyakorolt $\sqrt{2}\cdot K$ nagyságú erő, amelynek vízszintes irányú komponense éppen K (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

A testekre ható erők számításba vétele után most már felírhatjuk a mozgásegyenleteket x (vízszintes, balra pozitív) és y (függőleges, lefele pozitív) irányokban:

(1,x) $$N = m_1 a_{1x},$$

(1,y) $$m_1 g - K = m_1 a_{1y},$$

(2) $$K = m_2 a_2,$$

(3) $$K - N = MA.$$

A mozgásegyenletek mellett még két kényszerfeltételt is megfogalmazhatunk. Az első feltétel abból adódik, hogy az m_1 és M tömegű testek vízszintes gyorsulása egyenlő kell hogy legyen, hiszen az m_1 tömegű test az M tömegű testen lévő üreg függőleges falán gurul, attól (a mozgás kezdetekor még biztosan) nem válik el. Fennáll tehát:

(4) $$a_{1x} = A.$$

A kötél nyújhatatlansága is ad egy kényszerfeltételt: az m_1 tömegű test függőleges gyorsulása és az m_2 tömegű testnek a *csigához viszonyított* (jobb felé irányuló) vízszintes gyorsulása egyenlő nagyságú, hiszen a kötél egyik vége ugyanannyit közeledik a csigához, amennyit a másik távolodik attól. Teljesül tehát:

(5) $$a_2 + A = a_{1y}.$$

Az $(1,x)$, $(1,y)$, (2), (3), (4), (5) egyenletrendszer megoldható, belőlük a hat ismeretlen (a_{1x}, a_{1y}, a_2, A, F és N) kifejezhető:

(6) $$A = a_{1x} = \frac{m_1 m_2}{2m_1 m_2 + m_1^2 + M(m_1 + m_2)}\, g.$$

A megadott tömegadatok esetén

$$A = a_{1x} = \frac{1}{10}\, g = 0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$a_2 = \frac{m_1(M+m_1)}{2m_1m_2+m_1^2+M(m_1+m_2)}g = \frac{3}{10}\,g = 2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_{1y} = \frac{m_1(M+m_1+m_2)}{2m_1m_2+m_1^2+M(m_1+m_2)}g = \frac{4}{10}\,g = 3{,}92\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Kiszámíthatjuk még az erőket is: $N \approx 6$ N és $K \approx 1$ N.

Összefoglalva: az m_1 tömegű test gyorsulásvektora

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \approx 4{,}04\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nagyságú és az iránya a vízszintessel $\operatorname{arctg}\left(\frac{3{,}92}{0{,}98}\right) = 76^\circ$-os szöget zár be (balra lefelé mutat), az m_2 tömegű test gyorsulása $2{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *jobbra,* az M tömegű test pedig $0{,}98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással *balra* indul el.

b) A (6) összefüggésből látható, hogy a kifejezésben szereplő tört mindig pozitív, így az M tömegű kocsi (bármilyen tömegadatok mellett) biztosan *balra* indul el. $M \gg m_1, m_2$ esetben a kifejezés nevezője sokkal nagyobb a számlálónál, ilyenkor az M tömegű test gyorsulása elhanyagolhatóan kicsi. Az

$$\frac{M}{m_1} \to \infty, \qquad \frac{M}{m_2} \to \infty$$

idealizált határesetben $A = 0$, ez tehát a *minimális* gyorsulású eset.

A kifejezés számlálójában láthatóan csak egy tag szerepel (m_1m_2), ugyanezen tag pedig szerepel a nevezőben is, kétszeres szorzóval ($2m_1m_2$). Mivel a nevező többi tagja mind pozitív, ez azt jelenti, hogy a tört értéke nem lehet nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Ez a maximális gyorsulású eset pedig akkor valósulhat meg, ha $m_2 \gg m_1 \gg M$, ekkor

$$A = \frac{1}{2 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{M}{m_1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}\,g \approx \frac{1}{2}\,g \approx 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján