

Megoldás. Az egyenletet rendezzük először úgy, hogy mindkét oldalon két-két tört szerepeljen.

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} - \frac{1}{c-x} + \frac{1}{d-x} = 0,$$
$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} = \frac{1}{c-x} - \frac{1}{d-x}.$$

A két oldalon külön-külön közös nevezőre hozva így olyan törtkifejezéseket kapunk, amelyeknek számlálója már nem tartalmaz ismeretlent:

$$\frac{b-a}{(a-x)(b-x)} = \frac{d-c}{(c-x)(d-x)}.$$

A nevezőkkel történő beszorzás és egy oldalra rendezés után rögtön látható, hogy ($a+d \neq b+c$ miatt) egy másodfokú $P(x)$ polinom zérushelyeit keressük.

$$(b-a)(c-x)(d-x) = (d-c)(a-x)(b-x),$$
$$P(x) = (b-a)(c-x)(d-x) - (d-c)(a-x)(b-x).$$

Ezek a zérushelyek egyben az eredeti egyenlet összes megoldásai is, mivel az eredeti egyenlet értelmezési tartományában nem szereplő a, b, c, d értékek egyikére sem lesz $P(x) = 0$. A polinomba behelyettesítve az egyes értékeket kapjuk, hogy $P(b) > 0$ és $P(c) < 0$, ezért az egyenletnek két megoldása van, amelyek közül az egyik a (b, c) intervallumba esik. A másik nem eshet ebbe az intervallumba, mert ha a polinom mindkét gyöke ebbe az intervallumba esne, akkor b -ben és c -ben ugyanolyan előjelű értéket kellene felvennie. Az egyenlet másik gyöke viszont nem eshet sem az (a, b) , sem a (c, d) intervallumba, mert pl. az (a, b) intervallumon azt látjuk, hogy $b-a > 0$, $c-x > 0$, $d-x > 0$, azaz $(b-a)(c-x)(d-x) > 0$, továbbá $d-c > 0$, $a-x < 0$, $b-x > 0$, azaz $(d-c)(a-x)(b-x) < 0$, tehát ezen az intervallumon $P(x)$ pozitív értékeket vesz fel, itt nem lehet zérushely. Hasonlóan a (c, d) intervallumot vizsgálva láthatjuk, hogy itt $P(x)$ csak negatív értékeket vesz fel, így itt sem lehet gyök.

$P(x)$ -ről tudjuk, hogy pozitív és negatív értéket is felvesz, így megállapítottuk, hogy két különböző gyöke van. Mivel se (b, c) -be, se (a, b) -be, se (c, d) -be nem eshet a másik gyök, azért biztos, hogy (a, d) -n kívül esik.