Williams Kada megoldása. Szeretnénk tehát egy olyan egész együtthatós nemkonstans homogén $f(x,y)$ polinomot találni, amire $f(x,y)=1$, ha $(x,y)\in S$. (Homogénnek nevezünk egy többváltozós polinomot, ha benne minden tag fokszáma egyenlő.)

Az $f(x,y)$ polinom létezését $|S|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ehhez felhasználjuk az ún. Bézout-lemmát, ami szerint bármely x és y egész számok legnagyobb közös osztója előállítható $ax+by$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Az $|S|=1$ esetből indulunk ki: ha $S=\big\{(x,y)\big\}$, akkor a Bézout-lemma szerint alkalmas $a,b\in\mathbb{Z}$-re $f(x,y)=ax+by$ megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy az $S=\big\{(a_1,b_1),\dots,(a_m,b_m)\big\}$ halmaz minden pontján $g(x,y)=1$, és szeretnénk az (a_{m+1},b_{m+1}) elemet hozzácsatolni. A Bézout-lemma szerint $Aa_{m+1}+Bb_{m+1}=1$ alkalmas $A,B\in\mathbb{Z}$-re. Mivel a

$$h(x,y)=\prod_{i=1}^{m}(a_iy-b_ix)$$

polinom értéke minden S-beli pontban 0, azért $C,K\in\mathbb{Z}$-re az

$$f(x,y)=g(x,y)^K-C\cdot(Ax+By)^{K\cdot\deg g-m}h(x,y)$$

homogén polinom értéke minden S-beli pontban 1 (feltesszük, hogy $K\ge m$), míg

$$f(a_{m+1},b_{m+1})=g(a_{m+1},b_{m+1})^K-C\cdot\underbrace{h(a_{m+1},b_{m+1})}_{=:M}.$$

Azt állítjuk, hogy $g(a_{m+1},b_{m+1})$ és $M=h(a_{m+1},b_{m+1})$ egymáshoz relatív prím. Valóban, ha lenne közös p prímosztójuk, akkor $p\mid m$ miatt p osztója lenne az M valamelyik $a_ib_{m+1}-b_ia_{m+1}$ tényezőjének ($1\le i\le m$). Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$\begin{aligned}b_i^{\deg g}g(a_{m+1},b_{m+1})&=g(b_ia_{m+1},b_ib_{m+1})\equiv g(a_ib_{m+1},b_ib_{m+1})=\\&=b_{m+1}^{\deg g}g(a_i,b_i)=b_{m+1}^{\deg g}\pmod p,\end{aligned}$$

s így $p\mid g(a_{m+1},b_{m+1})$-ből $p\mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p\mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M\ne0$, akkor a relatív prímség miatt $g(a_{m+1},b_{m+1})^{\varphi(|M|)}\equiv1\pmod M$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K=m\varphi\big(|M|\big)$ választással alkalmas $C\in\mathbb{Z}$-re $f(a_{m+1},b_{m+1})=1$ biztosítható. Ha pedig $M=0$, akkor a 0-hoz való relatív prímség miatt $g(a_{m+1},b_{m+1})=\pm1$, s így $K=2$ és $C=0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1},b_{m+1})=1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu

címen.