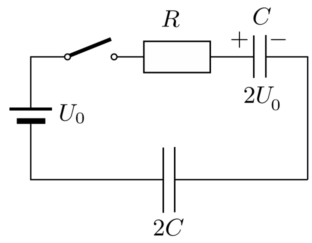
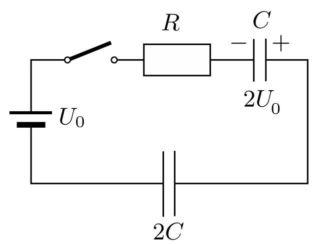
Megoldás. A feltöltött (C kapacitású és $Q_0 = 2CU_0$ töltésű) kondenzátor kezdeti polaritásától függően két eset lehetséges.

I. eset: A kondenzátor pozitív töltésű fegyverzete a bal oldalon van (*1. ábra*).



1. ábra

II. eset: A pozitív fegyverzet a jobb oldalra kerül (*2. ábra*).



2. ábra

Vizsgáljuk először az első esetet. A kapcsoló zárása után az áramkörben töltésáramlás indul meg, melynek során mindkét kondenzátor töltött állapotba kerül (*3. ábra*). A folyamat végén a körben már nem folyik áram, ennek következtében az ellenálláson nem esik feszültség. Írjuk fel a huroktörvényt erre az állapotra a 3. ábra jelöléseit használva (az óramutató járásával azonos irányban):

$$U_1 + U_2 - U_0 = 0. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy a két kondenzátort összekötő ágon az összes töltés a kezdeti és végállapotban egyenlő (hiszen a kondenzátor lemezei között nem haladhatnak át töltések):

$$-2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2, \tag{2}$$

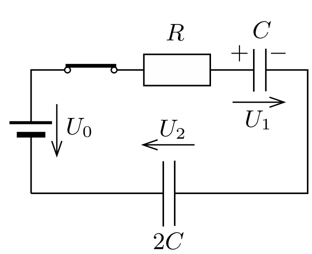
innen

$$2U_0 = U_1 - 2U_2. \tag{3}$$

Az (1) és (3) egyenletek rendszerének megoldása:

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0, \qquad U_2 = -\frac{1}{3}U_0.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a $2C$ kapacitású kondenzátoron a lemezek töltése a 3. ábrán jelölthöz képest ellentétes (a bal oldali lemez lesz pozitív töltésű).



3. ábra

Jóllehet az ellenálláson áthaladó áram időben bonyolult módon (belátható, hogy exponenciális függvény szerint) változik, az ellenálláson fejlődő Joule-hő elemi úton (integrálszámítás nélkül) is kiszámítható, ha energetikai megfontolásokat követünk. Feltételezzük, hogy az áramkörből nem jut ki energia (elhanyagolva az áramok által keltett mágneses tér gerjesztette elektromágneses hullámokat), így teljesül a

$$W_{\text{telep}} + W_C + W_{2C} + W_R = 0 \tag{4}$$

mérlegegyenlet. A fenti képletben W_{telep} a telep energiaváltozását, W_C és W_{2C} az egyes kondenzátorok energiaváltozását, W_R pedig az ellenálláson fejlődő hőt jelöli.

A kondenzátorok energiaváltozása:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(U_1^2 - (2U_0)^2\big) = -\frac{10}{9}CU_0^2,$$
$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_2^2 - 0\big) = \frac{1}{9}CU_0^2,$$

a telep energiaváltozása pedig az U_0 feszültség és a telepen áthaladó töltés szorzata:

$$W_{\mathrm{telep}} = U_0(Q_0 - CU_1) = U_0\left(2CU_0 - C\cdot\frac{4}{3}U_0\right) = \frac{2}{3}CU_0^2.$$

(A pozitív előjel azt jelenti, hogy a telepnek nő az energiája.)

A (4) energiamérleg segítségével kiszámíthatjuk az ellenálláson fejlődő hőt:

$$W_R = -W_{\mathrm{telep}} - W_C - W_{2C} = -\frac{2}{3}CU_0^2 - \left(-\frac{10}{9}CU_0^2\right) - \frac{1}{9}CU_0^2 = \frac{1}{3}CU_0^2.$$

A második esetben a fentiekhez teljesen hasonló módon járhatunk el. A megfelelő egyenletek csak a C kapacitású kondenzátor kezdeti töltését megadó kifejezés előjelében térnek el az első eset egyenleteitől:

$$U_1 + U_2 - U_0 = 0, \tag{1'}$$
$$+2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2, \tag{2'}$$
$$2U_0 = 2U_2 - U_1. \tag{3'}$$

Az $(1') - (3')$ egyenletek megoldása:

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = U_0.$$

(Ez azt jelenti, hogy a kapcsoló zárása után a C kapacitású kondenzátor összes töltése átkerül a másik kondenzátorra.) Az energiaváltozások:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(0 - (2U_0)^2\big) = -2CU_0^2,$$
$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_0^2 - 0\big) = CU_0^2,$$
$$W_{\mathrm{telep}} = -U_0\cdot 2CU_0 = -2CU_0^2.$$

(A telep energiaváltozása ebben az esetben negatív, hiszen az áram a telepfeszültséggel ellentétes irányban folyik.) Az energiamérlegből:

$$W_R = -W_{\mathrm{telep}} - W_C - W_{2C} = 2CU_0^2 - \big(-2CU_0^2\big) - CU_0^2 = 3CU_0^2.$$

Az ellenálláson fejlődő hő tehát a már kezdetben is feltöltött kondenzátor bekötésétől (polaritásától) függően $\frac{1}{3}CU_0^2$ vagy $3CU_0^2$.

Megjegyzés. Belátható, hogy ha egy ellenálláson időben exponenciálisan csökkenő áram folyik keresztül (esetünkben éppen ez történik), akkor a teljes kisülési folyamat során fejlődő Joule-hő az ellenállásra eső kezdeti (maximális) feszültség és az ellenálláson átfolyó töltés szorzatának felével egyezik meg.

Valóban, ha az áramerősség

$$I(t) = I_0\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

az ellenállásra eső feszültség tehát

$$U(t) = RI(t) = RI_0\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

akkor a folyamat során fejlődő Joule-hő (ami az időben változó $P(t) = U(t)I(t)$ teljesítmény integrálja):

$$W_R = \int_0^\infty U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = RI_0^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{RI_0^2}{2\lambda}.$$

Másrészt a kezdeti (maximális) feszültség az ellenálláson

$$U_{\max} = U(0) = RI(0) = RI_0,$$

a rajta átfolyó töltés pedig

$$Q = \int_0^\infty I(t)\,\mathrm{d}t = I_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\lambda}.$$

Látható, hogy a hivatkozott $W_R = \frac{1}{2}U_{\max}Q$ összefüggés teljesül. A feladatban szereplő kapcsolásnál a keresett hő

$$\frac{1}{2}(-U_0)\left(-\frac{2}{3}CU_0\right) = \frac{1}{3}CU_0^2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}(3U_0)(2CU_0) = 3CU_0^2.$$