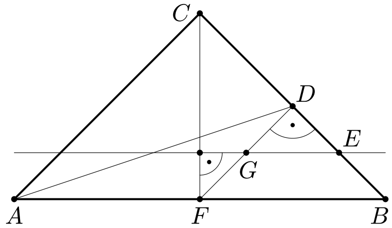
I. megoldás. Legyen E a BD szakasz felezőpontja. Mivel G az FD szakasz a felezőpontja, azért EG a BDF háromszögnek középvonala, és így $EG \parallel BF$. Mivel BF merőleges CF-re, azért EG is merőleges CF-re (*1. ábra*).



1. ábra

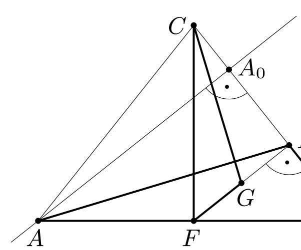
Továbbá, mivel FD merőleges BC-re, EG pedig CF-re, azért a G pont az FEC háromszög magasságpontja. Ebből következik, hogy CG merőleges az EF szakaszra.

Az ABD háromszögben E a BD oldal, F pedig az AB oldal felezőpontja, így EF az ABD háromszög középvonala, amiből következik, hogy $EF \parallel AD$.

Mivel CG merőleges EF-re, azért merőleges az EF-fel párhuzamos AD szakaszra is.

II. megoldás. $AFC\sphericalangle = BFC\sphericalangle = 90^\circ$. Az A pontból állítsunk merőlegest a BC oldalra, talppontját nevezzük A_0-nak.

$ABC\sphericalangle = CFD\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az AA_0B és a CFD derékszögű háromszögeknek két szöge is megegyezik, így hasonlóak. Az AB oldal merőleges a CF-re, ha ezeket azonos szöggel forgatjuk azonos (pozitív vagy negatív) irányba, az általuk bezárt szög 90° marad (*2. ábra*).



2. ábra

Mivel F az AB oldal felezőpontja és $FD \parallel AA_0$, azért az FD az ABA_0 háromszög középvonala és D a BA_0 szakasz felezőpontja. Tehát AD az AA_0B háromszög A csúcsából a szemközti oldal felezőpontjába megy, hasonlóan a CG a CFD háromszög C csúcsából az FD felezőpontjába. Így az ABD háromszög hasonló a CFG háromszöghöz. Emiatt $BAD\sphericalangle = FCG\sphericalangle$. Tehát ha ezzel a szöggel forgatjuk el az AB, illetve a CF szakaszokat, melyekről tudjuk, hogy merőlegesek egymásra, akkor pontosan az AD szakasz, illetve a CG szakasz egyenesére jutunk, azaz ezek is merőlegesek egymásra.

III. megoldás. Bizonyítandó, hogy az AD szakasz merőleges a CG-re. Vektorokkal ez úgy írható fel, hogy a skaláris szorzatuk 0, tehát $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$. Ezt szeretnénk belátni. Alakítsuk a bal oldalt:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}) \cdot \frac{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CD}}{2} =$$
$$= \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD}}{2}.$$

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CD}$, tehát skaláris szorzatuk 0. Így a kifejezést tovább alakítva, az egyenlő lesz az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CF}}{2} = \frac{\overrightarrow{AF}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + \overrightarrow{FD}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{CB}$, azért ez egyenlő az alábbival:

$$\frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{BF}}{2} = \frac{\overrightarrow{FD}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF})}{2}.$$

Mivel $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} = \mathbf{0}$, így ezzel beláttuk, hogy az $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CG}$ szorzat valóban zérus, tehát az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CG}$ szakaszok derékszöget zárnak be egymással.

IV. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a következőképpen: $F(0;0)$, $A(-b;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$. Ekkor $\overrightarrow{CB}(b;-c)$, az FD egyenes egyenlete $bx-cy=0$, másképp $x=\frac{c}{b}y$; a CB egyenes egyenlete pedig $cx+by=cb$.

Mivel a két egyenes metszéspontja D, ezért a CB egyenletébe behelyettesítve $x=\frac{c}{b}y$-t, megkapjuk D koordinátáit:

$$D\left(\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

G az FD felezőpontja:

$$G\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{1}{2}\cdot\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

Ebből

$$\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2};\frac{1}{2}\cdot\frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AD}\left(\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2};\frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a skaláris szorzat 0 legyen:

$$\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2b}{c^2+b^2}\cdot\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\cdot\frac{cb^2}{c^2+b^2}=0.$$

Ezzel állításunkat beláttuk.