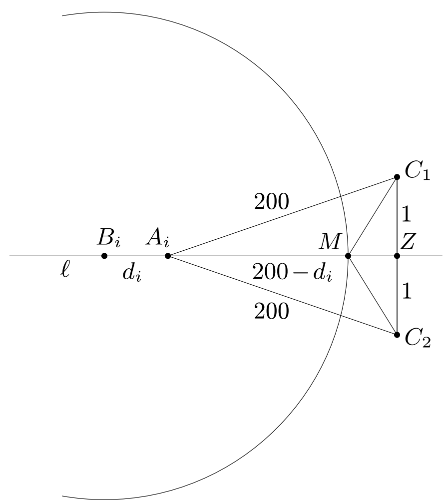
Kovács Benedek megoldása. A feladat állítása nem igaz: belátjuk, hogy a vadász akármilyen stratégiája esetén a nyomkövető jelezheti $P_1, P_2, \ldots, P_{10^9}$ pontok olyan sorozatát, hogy a nyúlnak létezzen olyan, a szabályok szerinti $A_0A_1A_2\ldots A_{10^9}$ lehetséges mozgássorozata, amire $B_{10^9}A_{10^9} > 100$. Vagyis ha a nyúl maga jelölheti ki a nyomkövető jelzéseit a számára legkedvezőbb módon, akkor a vadász nem tudja garantálni, hogy 100-on belül kerüljön a nyúlhoz.

Legyen $d_i = A_iB_i$. A nyúl célja az, hogy $d_{10^9} > 100$ legyen. Nyilván az is elég számára, ha valamilyen $i < 10^9$-re $d_i > 100$, hiszen ha ekkor a nyúl a további lépésekben már mindig a vadásszal ellentétes irányban lép, akkor lépésével a vadásztól való távolságát 1-gyel növeli, a vadász pedig a saját lépésében legfeljebb 1-gyel csökkentheti, vagyis egy fordulón belül a távolság nem csökken, így a 10^9-edik forduló után is 100-nál nagyobb lesz.

Lemma. *Ha az i. fordulóban $d_i < 100$, a vadász nem tudja garantálni, hogy $d_{i+200}^2 \le d_i^2 + \frac{1}{2}$ legyen.*

Bizonyítás. A nyúl tehát 200 forduló alatt szeretné a vadásztól vett távolságának négyzetét $\frac{1}{2}$-nél többel megnövelni. A vadásznak az i-edik forduló kezdetekor a nyúl mozgásáról rendelkezésére álló információt a $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ pontok jelentik. Ezen pontok alapján a nyúlnak akár több lehetséges helye is lehet, de most tegyük fel még azt is, hogy a nyúl konkrétan elárulja a helyzetét, az A_i pontot. A korábbi információk így feleslegessé válnak.

Jelöljük ℓ-lel az A_iB_i egyenest ($A_i = B_i$ esetén tetszőleges egyenest A_i-n keresztül). Mérjük fel az *ábra* szerint az l egyenesre az A_i pontból, B_i-vel ellentétes irányban $\sqrt{39999}$ egységet, így kapva a Z pontot. A Z pontban merőlegest állítva ℓ-re, ezen a merőlegesen vegyük fel a C_1 és C_2 pontokat Z-től 1 távolságra. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $A_iC_1 = A_iC_2 = \sqrt{39999+1} = 200$ lesz.



A nyúl számára a következő 200 fordulóban az lesz a stratégia, hogy egyenesen elmegy a C_1 célpontba (ezt megteheti, hiszen $A_iC_1 = 200$). Mivel a teljes A_iC_1 szakasz 1 távolságon belül van az ℓ egyenestől, a nyúl minden fordulóban kijelölheti helyzetének az ℓ-re vett merőleges vetületét, mint a nyomkövető által adandó jelzést.

Természetesen ugyanezeket a jelzéseket megadhatná a nyúl akkor is, ha nem a C_1, hanem a C_2 pontba menne el hasonló módon, hiszen a két útvonal ℓ-re nézve szimmetrikus. A vadász így a 200 forduló alatt kapott jelzésekből nem fogja tudni, hogy a C_1 vagy a C_2 pont felé tart-e a nyúl. Nézzük azt a B_{i+200} pontot, ahova a vadász ezalatt eljutott. Ez a pont biztosan a B_i középpontú, 200 sugarú körön belül van, legyen ennek az ℓ-lel való (a nyúl irányába eső) metszéspontja M.

Osszuk fel ezt a kört két részre az ℓ egyenes (C_1C_2 felezőmerőlegese) mentén. Az egyik (az ábra szerint felső) részben lévő pontok a C_1 célponthoz, a másik (alsó) részben lévők C_2-höz vannak közelebb. A felső rész összes pontjára igaz, hogy legalább olyan távol vannak C_2-től, mint M, mert mind vízszintesen, mind függőlegesen legalább olyan távol vannak tőle (ha az ábra szerint, vagyis az ℓ egyenessel párhuzamosnak vesszük a vízszintes irányt). Ugyanígy az alsó rész összes pontja legalább olyan távol van C_1-től, mint M.

Így a két lehetséges célpont közül a távolabbi mindenképpen legalább olyan messze lesz a vadásztól, mint az $MC_1 = MC_2$ távolság. Számítsuk ki ezt a távolságot. $B_iA_i = d_i$, így $A_iM = 200 - d_i$. Így $MZ = A_iZ - A_iM = \sqrt{39999} - 200 + d_i$, és a Pitagorasz-tétel alapján

$$MC_1 = \sqrt{MZ^2 + C_1Z^2} = \sqrt{\left(\sqrt{39999} - 200 + d_i\right)^2 + 1}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez a távolság nagyobb, mint $\sqrt{d_i^2+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\sqrt{39\,999}-200+d_i\right)^2+1} &> \sqrt{d_i^2+\frac{1}{2}},\\
\left(\sqrt{39\,999}-200+d_i\right)^2+1 &> d_i^2+\frac{1}{2},\\
d_i^2+2\left(\sqrt{39\,999}-200\right)d_i+80\,000-400\sqrt{39\,999} &> d_i^2+\frac{1}{2},\\
2\left(\sqrt{39\,999}-200\right)d_i-400\sqrt{39\,999}+80\,000 &> \frac{1}{2},\\
2\left(\sqrt{39\,999}-200\right)d_i+400\left(200-\sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{2},\\
(400-2d_i)\left(200-\sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{2},\\
(200-d_i)\left(200-\sqrt{39\,999}\right) &> \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Mivel $d_i \leq 100$, azaz $200-d_i \geq 100$, elég belátni, hogy

$$\begin{aligned}
200-\sqrt{39\,999} &> \frac{1}{400},\\
80\,000-400\sqrt{39\,999} &> 1,\\
79\,999 &> 400\sqrt{39\,999}.
\end{aligned}$$

Négyzetre emelve:

$$79\,999^2 > 39\,999\cdot 400^2.$$

Ez pedig igaz, mert

$$79\,999^2-1=80\,000\cdot 79\,998=16\,0000\cdot 39\,999=39\,999\cdot 400^2.$$

Ekvivalens lépésekkel dolgoztunk, így a vadász számára rosszabbik távolság legalább $MC_1 > \sqrt{d_i^2+\frac{1}{2}}$, így a lemmát beláttuk.

A lemmából már következik a bizonyítandó állítás: a játék elején $d_0^2=0$, és a lemma szerint (teljes indukcióval) a vadász számára legrosszabb esetben $d_{200n}^2 > \frac{1}{2}n$, amíg a távolság el nem éri a 100-at. Ez az elérés pedig legkésőbb $n=2\cdot 100^2=20\,000$-re bekövetkezik, azaz $200\cdot 20\,000=4\cdot 10^6$ fordulón belül. Vagyis $d_{4\cdot 10^6}^2>10\,000$, azaz $d_{4\cdot 10^6}>100$. A nyúl ezzel elérte a célját, hiszen $4\cdot 10^6 \leq 10^9$.