Matolcsi Dávid megoldása. Ha $f(0)=0$, akkor $y=0$-nál ezt kapjuk:

$$f\big(f(x)f(0)\big)+f(x+0)=f(0\cdot x).$$

Ebben az esetben $f(x)=0$ minden x-re. Ez valóban megoldása a függvényegyenletnek.

Most nézzük azt az esetet, amikor $f(0)\neq 0$. Ha $x=0$ és $y=0$, akkor

$$f\big(f(0)^2\big)+f(0)=f(0),\quad f\big(f(0)^2\big)=0.$$

Tegyük fel, hogy $f(c)=0$ és $c\neq 1$. Ha $y=1+\dfrac{1}{x-1}$, akkor $(x-1)(y-1)=1$, azaz $x+y=xy$, ezért $f(x+y)=f(xy)$, így $f\big(f(x)f(y)\big)=0$.

Legyen $x=c$ és $y=1+\dfrac{1}{c-1}$. Ekkor $f\left(f(c)f\left(1+\dfrac{1}{c-1}\right)\right)=0$. Mivel $f(c)=0$, $f(0)=0$, ez viszont ellentmond az elején kikötött feltételnek.

Azt kaptuk, hogy $f(c)=0$ esetén $c=1$, így $f(0)^2=1$, ezért $f(1)=f\big(f(0)^2\big)=0$, továbbá $f(0)=1$ vagy $f(0)=-1$.

Világos, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha $-f(x)$ is megoldása (mindkét oldal előjele megfordul). Ezért az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $f(0)=-1$.

Helyettesítsünk most az egyenletbe $y=1$-et:

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(1)\big)+f(x+1)&=f(1\cdot x),\\ f(0)+f(x+1)&=f(x),\\ f(x+1)&=f(x)+1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy n egészekre $f(x+n)=f(x)+n$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ injektív. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis létezik olyan $A\neq B$, hogy $f(A)=f(B)$. Legyen n egy A-nál nagyobb egész, és legyen $A-n=a$ és $B-n=b$, ahol tudjuk, hogy a negatív.

Ha $f(A)=f(B)$, akkor $f(a)=f(b)$. Az $x^2-bx+a-1=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $b^2-4(a-1)$, ami pozitív (mivel $a-1$ negatív), ezért az egyenletnek két gyöke van, r és s. A Viéte-formulákból tudjuk, hogy $r+s=b$ és $rs=a-1$; így $x=r$ és $y=s$ választással $f\big(f(r)f(s)\big)+f(b)=f(a-1)=f(a)-1$.

Az egyenletből kivonható $f(a)=f(b)$: $f\big(f(r)f(s)\big)=-1$, $f\big(f(r)f(s)+1\big)=0$, amiből $f(r)f(s)+1=1$, azaz $f(r)f(s)=0$. Feltehető, hogy $s=1$, ekkor $a=1\cdot r+1$ és $b=r+1$, tehát $a=b$, ezzel ellentmondásra jutottunk; a függvény valóban injektív.

Legyen $y=1-x$. Ekkor $f\big(f(x)f(1-x)\big)+f(1)=f\big(x(1-x)\big)$,

$$f\big(f(x)f(1-x)\big)=f\big(x-x^2\big).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(1-x)=x-x^2$.

Legyen most $y=-x$. Ekkor $f\big(f(x)f(-x)\big)+f(0)=f\big(-x^2\big)$,

$$f\big(f(x)f(-x)\big)-1=f\big(-x^2\big),$$

$f\big(f(x)f(-x)\big)=f\big(1-x^2\big)$.

Az injektivitás miatt $f(x)f(-x)=1-x^2$, ezért $f(x)f(1-x)-f(x)f(-x)=x-x^2-\big(1-x^2\big)=x-1$. Másrészt

$$f(x)f(1-x)-f(x)f(-x)=f(x)\big(f(1-x)-f(-x)\big)=f(x).$$

Így $f(x)=x-1$ minden x-re. Ez valóban jó megoldás: $(x-1)(y-1)-1+x+y-1=xy-1$.

Ez volt a megoldás, amikor $f(0)=-1$, és ennek az ellentettje, $f(x)=1-x$ a megoldás, amikor $f(0)=-1$.

Tehát a függvényegyenletnek három megoldása van: $f(x)=0$, $f(x)=x-1$ és $f(x)=1-x$.