Gáspár Attila megoldása.

1. állítás: *Ha* $a_0 \equiv 0 \pmod 3$*, akkor a sorozat tartalmazza a* 3*-at.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 3$, akkor az állítás triviális. Ha $a_0 = 6$, akkor $a_1 = 9$, és $a_2 = 3$, ezért az állítás igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \ge 9$.

Látható, hogy az $a_0, a_0+3, a_0+6, \ldots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. A sorozat összes eleme 3-mal osztható, ezért ez a négyzetszám $x^2 = (3k)^2$ alakú. Végtelen sok 3-mal osztható négyzetszám van, ezért a sorozat tartalmaz négyzetszámot. A $\big(3(k-1)\big)^2 = (x-3)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = x(x-6) + 9 > x + 9 > x$. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel. $x < a_0$, ezért az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

Látható, hogy ha $a_0 = 3$, akkor $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ és $a_3 = 3$. Ha $3 \mid a_0$, akkor az 1. állítás miatt a 3 végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

2. állítás: *Ha* $a_0 \equiv 1 \pmod 3$*, akkor a sorozat tartalmaz* $3k+2$ *alakú számot.*

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 1$, akkor $a_1 = 4$, és $a_2 = 2$. Ebből látható, hogy az állítás $a_0 = 4$ esetén is igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \ge 7$.

Látható, hogy az $a_0, a_0+3, a_0+6, \ldots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. Ilyen biztosan van, mert végtelen sok $3k+1$ alakú négyzetszám van. Legyen ez a négyzetszám x^2. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel.

Ha $x = 3k+2$ alakú, akkor az állítás igaz.

Ha $x = 3k+1$ alakú, akkor a $(3k-1)^2 = (x-2)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 = x(x-4) + 4 > x + 4 > x$. Az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

3. állítás: *Ha* $a_0 \equiv 2 \pmod 3$*, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Egy négyzetszám nem lehet $3k+2$ alakú. Így az $a_0, a_0+3, a_0+6, \ldots$ sorozat nem tartalmaz négyzetszámot. Ekkor $a_1 = a_0 + 3$, $a_2 = a_0 + 6$, $\ldots$, $a_n = a_0 + 3n$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Látható, hogy ha a_0 nem osztható 3-mal, akkor a 2. és 3. állítás miatt a sorozat egy idő után szigorúan monoton növekvő. Így nincs olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz.

Tehát pontosan akkor van olyan A, amit végtelen sokszor tartalmaz a sorozat, ha $3 \mid a_0$.