A feladat többféle módszerrel is megoldható. Az alább bemutatott eljárások közül kettő fizikai (optikai, illetve hangtani) megfontolásokra épül, a harmadik a differenciálszámítás matematikai apparátusának felhasználásával jut el a végeredményig. (A három különböző gondolatmenetű megoldás jelöléseit úgy változtattuk meg, hogy az eredmények egymással könnyen összehasonlíthatóak legyenek. – A Szerk.)

I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot fizikai eszközökkel! Használjuk a fényterjedést leíró *Fermat-elvet*: a fény két pont között olyan útvonalon terjed, amely mentén a fényterjedés ideje a szomszédos (a tényleges útvonaltól csak kicsit eltérő) útvonalak idejéhez képest a lehető legkisebb.

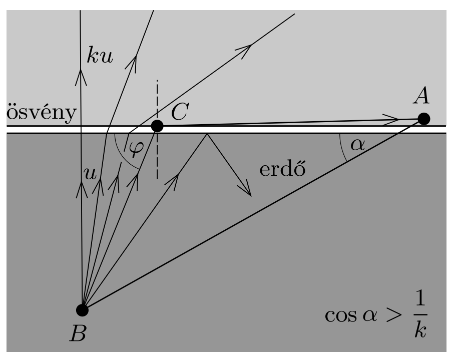
Tegyük fel, hogy az ösvény B-vel átellenes felén mindenhol ku sebességgel haladhatunk, és az A pont az ösvénytől egy „hajszálnyi" távolságra, de már az ösvény túloldalán helyezkedik el. (Ez érdemben nem módosítja a feladatot, hiszen ha már egyszer elértük az ösvényt, azon nyilván gyorsan és egyenesen érdemes haladjunk, nem pedig a túloldali erdőben görbe útvonal mentén és lassabban.)

Ebben az új megfogalmazásban a probléma a következő kérdéssel egyenértékű: Miként juthat el a fény egy optikailag sűrűbb közeg B pontjából az optikailag ritkább közeg A pontjába, ha a két közeget egy sík felület választja el egymástól és a relatív törésmutató (a fénysebességek aránya) k?

A B pontból kiinduló fénysugarak a két közeg határán megtörnek, illetve visszaverődnek. Ha a k törésmutató „elegendően nagy", akkor a törési törvény szerint lesz egy olyan fénysugár, amelynek törési szöge 90°, vagyis amelyik fénysugár a két közeg határán (az ösvény mentén) halad tovább és jut el az A pontig (*1a. ábra*). Ezen fénysugár beesési szöge az ábra jelöléseit használva éppen $90^\circ-\varphi$, így a Snellius–Descartes-törvény szerint

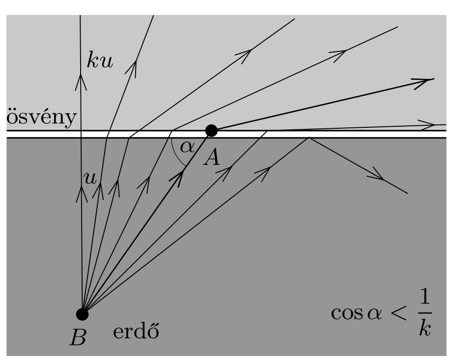
$$\frac{\sin(90^\circ-\varphi)}{\sin 90^\circ}=\cos\varphi=\frac{1}{k}.$$

A közeghatárt a C ponttól balra elérő fénysugarak átjutnak az optikailag ritkább közegbe, a C-től jobbra érkező fénysugarak pedig teljes visszaverődést szenvednek. Az ábrán látható φ szög nyilván nagyobb, mint α, tehát a megadott k és α adatok között fenn kell álljon a $\cos\alpha>\dfrac{1}{k}$ egyenlőtlenség; ez adja meg az „elegendően nagy törésmutató" kifejezés pontos jelentését.



1a. ábra

Amennyiben a törésmutató nem túl nagy (vagyis $\cos\alpha<1/k$), a B-ből kiinduló fénysugarak egyike törésmentesen, mindvégig az optikailag sűrűbb közegben haladva jut el az A pontig (*1b. ábra*). Ilyen körülmények között az eredeti feladat megoldása: érdemes mindvégig az erdőben maradnunk, és ott egyenes úton haladva juthatunk el leghamarabb a B pontból az A pontig.



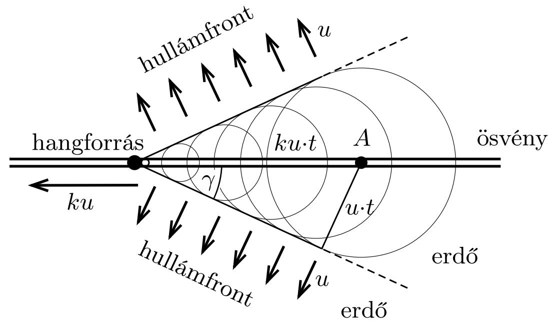
1b. ábra

II. megoldás. Ha a B pontból valamilyen úton haladva a legrövidebb idő alatt jutunk az A pontba, akkor nyilván ugyanezen az útvonalon juthatunk leghamarabb az A pontból a B pontba. Vizsgáljuk a továbbiakban ezt a „megfordított" problémát!

Képzeljük el, hogy az A pontból indulva egy hangforrás mozog az ösvény mentén ku sebességgel, miközben folyamatosan olyan hanghullámokat kelt, amelyek u sebességgel terjednek az erdőben ($k>1$). Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyeket a hanghullámok elérnek a hullámforrás indulásától számított t idő alatt? A különböző helyekről különböző időpillanatokban kiinduló gömbhullámok egy kúpot (az ún. *Mach-kúpot*) jelölnek ki (*2a. ábra*). A kúp csúcsa ku sebességgel mozog, a kúp félnyílásszöge

$$\gamma = \arcsin\frac{u}{ku} = \arcsin\frac{1}{k},$$

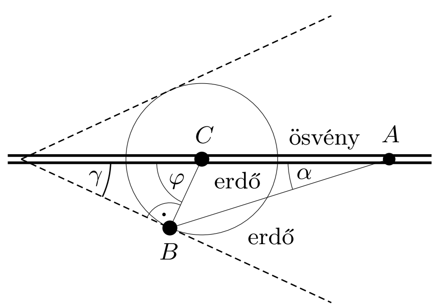
a kúp alkotói pedig u sebességgel mozogva távolodnak a szimmetriatengelytől (vagyis az ösvénytől). A γ szög (az ún. *Mach-szög*) egyértelműen meghatározható, hiszen a feladat szövege szerint $k>1$.



2a. ábra

Az idő múltával lesz egy olyan pillanat, amikor az egyre táguló kúp alkotója (vagyis a hullámfront) eléri a B pontot (*2b. ábra*). Tekintsük a B ponton átmenő, a hullámfrontra merőleges egyenes és az ösvény metszéspontját. Ezen C pontból kiinduló hullám éri el leghamarabb a B pontot, tehát ezen a ponton vezet át az eredeti feladat megoldása, a legrövidebb idejű útvonal is. Ezek szerint

$$\varphi = 90^\circ - \gamma, \quad \text{vagyis} \quad \cos\varphi = \sin\gamma = \frac{1}{k}.$$



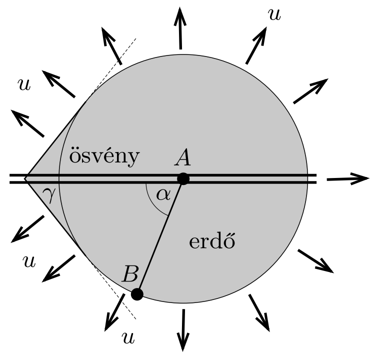
2b. ábra

Természetesen (az ábrán választott mozgásirány esetén) a C pont nem lehet A-tól jobbra, vagyis $\varphi \ge \alpha$. Emiatt a fentebb leírt megoldás csak

$$\cos\alpha \ge \cos\varphi = \frac{1}{k}$$

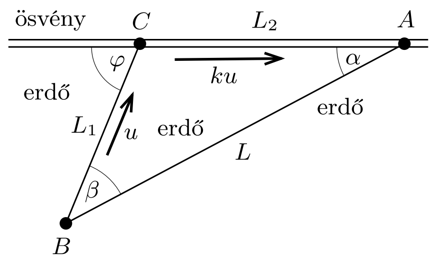
teljesülése esetén helyes. A $k\cos\alpha = 1$ határesetben $\varphi=\alpha$, vagyis a C pont egybeesik A-val. Ilyenkor a legrövidebb idő, ami alatt eljuthatunk A-ból B-be (vagy B-ből A-ba) olyan útnak felel meg, amely mindvégig az erdőben halad.

Vajon melyik útvonalon haladó hullám éri el leghamarabb a B pontot, ha $k\cos\alpha < 1$? Ebben az esetben nem a Mach-kúp hullámfrontja, hanem az A pontból kiinduló gömbhullám éri el elsőként a B pontot (*2c. ábra*), vagyis a legrövidebb idejű mozgás mindvégig az erdőben halad.



2c. ábra

III. megoldás. Jelöljük az A és B pont távolságát L-lel, azt a pontot pedig, ahol elérjük az ösvényt, C-vel (*3. ábra*). Az A és C, valamint a C és B pontok között nyilván egyenes utat érdemes választanunk. Az erdőben megtett út irányát a BA iránytól mért β szöggel, vagy az ösvény irányához viszonyított $\varphi = \alpha + \beta$ szöggel jellemezhetjük.



3. ábra

Az erdőben megtett út hossza (a szinusztétel alapján) $L_1 = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} L$, az ösvényen megtett út hossza pedig $L_2 = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} L$. A teljes menetidő a β szög függvényében:

$$t(\beta) = \frac{L_1}{u} + \frac{L_2}{ku} \equiv \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

A függvény (számunkra érdekes) értelmezési tartománya $0 \le \beta \le 90^\circ - \alpha$, hiszen nyilván nem éri meg az ösvényt (az ábrán vázolt elrendezés esetén) az A ponttól jobbra, vagy a B-hez legközelebbi ponttól balra elérni.

A menetidő minimumát a $t(\beta)$ függvény deriváltjának eltűnése határozhatja meg. Ha létezik olyan β szög az értelmezési tartomány belsejében, ahol

$$0 = t'(\beta) = \frac{L}{u} \cdot \frac{\frac{1}{k}\cos\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)\left(\sin\alpha + \frac{1}{k}\sin\beta\right)}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \left[\frac{1}{k} - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

ott a haladási időnek szélsőértéke (esetünkben minimuma) lehet. Mivel sem $(L/u)\sin\alpha$, sem pedig $\sin(\alpha+\beta) \equiv \sin\varphi$ nem lehet nulla, a derivált csak akkor válhat nullává, ha

$$\frac{1}{k} = \cos(\alpha+\beta), \quad \text{vagyis} \quad k\cos\varphi = 1.$$

Mivel $\beta \ge 0$, vagyis $\varphi \ge \alpha$, a derivált nullává válásának feltétele csak

$$1 = k\cos\varphi \le k\cos\alpha$$

esetben teljesülhet.

Amennyiben $k\cos\alpha < 1$ áll fenn, a $t(\beta)$ függvény monoton növekszik, így a legrövidebb idő a $\beta = 0$ szöghöz tartozik. Ilyen esetben (vagyis amikor az ösvényen haladás sebessége nem „elég nagy") érdemes mindvégig az erdőben haladjunk, egyenes vonalban B-től az A pontig.