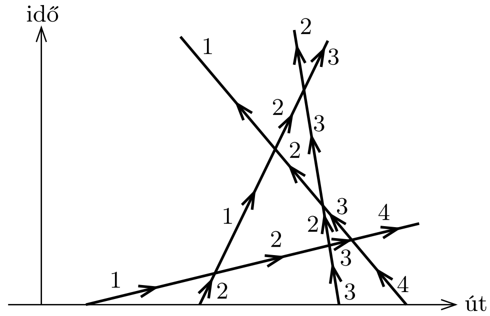
[1]

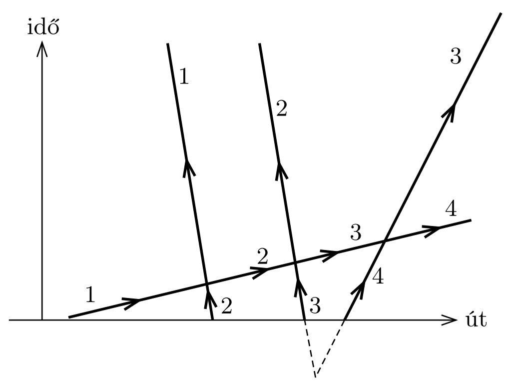
Megoldás. *a*) Az ütközések közötti időszakokban a gyöngyszemek (amelyeket az egyszerűség kedvéért pontszerűnek tekintünk) egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak. Tudjuk továbbá, hogy azonos tömegű testek rugalmas ütközésekor a testek sebessége „felcserélődik”.

Ábrázoljuk a gyöngyszemek mozgását és ütközését egyetlen út–idő diagramon! Az ütközésmentes időszakokban mindegyik gyöngyszem mozgása egy-egy egyenessel adható meg. Ezek az egyenesek (a gyöngyszemek „világvonalai”) az ütközések után is „törésmentesen” folytatódnak, csak az ütközések résztvevői szerepet cserélnek. Az ütközések számát a gyöngyszemek mozgását megadó egyenesek metszéspontjainak száma adja meg (*1. ábra*). (Az ábrán látható számok a gyöngyszemek azonosítását segítik.) Az ütközések (metszéspontok) száma legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.



1. ábra

Természetesen előfordulhat, hogy valamelyik két egyenes párhuzamos, ezeknek nincsen metszéspontja, illetve az is lehet, hogy két egyenes metszéspontja az indításnál korábbi időpontot jelöl ki (*2. ábra*). Ezekben az esetekben a ténylegesen bekövetkező ütközések száma *kevesebb,* mint $N(N-1)/2$.



2. ábra

b) A lejtős rúdon súrlódásmentesen csúszó, tehát egyenletesen gyorsuló gyöngyszemek mindegyikének világvonala parabola. Ezen parabolák metszéspontjainak összeszámlálása az előzőnél sokkal bonyolultabb feladatnak látszik, de – szerencsére – nem ez a helyzet.

A gyöngyszemek a gyorsulását a rúd α hajlásszöge határozza meg ($a = g\sin\alpha$). Üljünk bele – gondolatban – egy olyan koordináta-rendszerbe, amely éppen a gyorsulással mozog a rúddal párhuzamosan. Ebből a rendszerből szemlélve a gyöngyszemek „súlytalanok”, mozgásuk tehát ugyanolyan egyenes vonalú, egyenletes mozgás, mint amilyen a vízszintes rúdnál volt. Emiatt az ütközések száma most is legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.

[1] A KöMaL 2017. évi áprilisi számában megjelent, pontversenyen kívüli feladat.