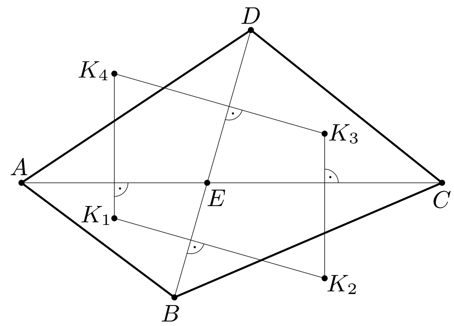
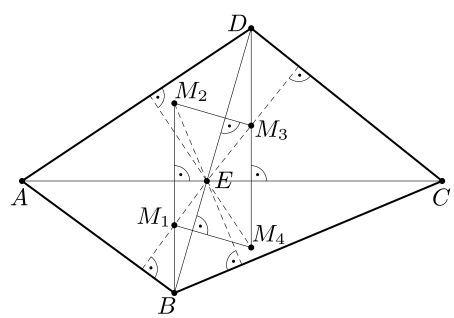
Megoldás. Mivel egy háromszög Feuerbach-körének középpontja a körülírt köre középpontjának és magasságpontjának a szakaszfelező pontja, így vizsgáljuk meg ezeket a pontokat.

Jelölje az ABE, BCE, CDE, ADE háromszögek körülírt körének középpontját rendre K_1, K_2, K_3, K_4 (*1. ábra*). Mivel egy háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelezőinek a metszéspontja, így $K_1K_2 \parallel K_3K_4 \perp BD$ és $K_1K_4 \parallel K_2K_3 \perp AC$, így mivel két párhuzamos oldalpárja van $K_1K_2K_3K_4$ paralelogramma.



1. ábra

Legyenek a fenti háromszögek magasságpontjai rendre M_1, M_2, M_3, M_4 (*2. ábra*). A magasságpont a csúcsokból a szemközti oldalakra állított merőlegesek metszéspontja, így $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \perp AC$ és $M_1M_4 \parallel M_2M_3 \perp BD$, tehát hasonlóan az előzőhöz $M_1M_2M_3M_4$ is paralelogramma.



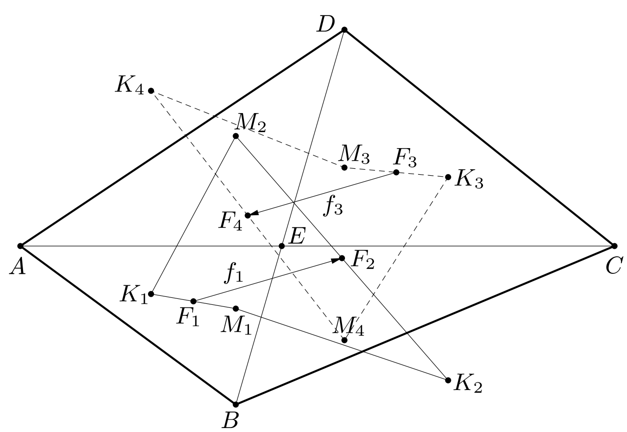
2. ábra

Legyen $\overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{K_3K_4} = \overrightarrow{k_3}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1K_2K_3K_4$ és $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, így tudjuk, hogy $\overrightarrow{k_1} = -\overrightarrow{k_3}$ és $\overrightarrow{m_1} = -\overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1M_1K_2M_2$ négyszögben F_1F_2 középvonal (*3. ábra*), ezért tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{f_1} = \frac{\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1}}{2}$$

Valamint hasonlóan a $K_3M_3K_4M_4$ négyszögben

$$\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{k_3} + \overrightarrow{m_3}}{2} = \frac{-(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1})}{2} = -\overrightarrow{f_1}.$$



3. ábra

Tehát $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{f_1}$, így $F_1F_2 \parallel F_3F_4$ és egyenlő hosszúak, vagyis $F_1F_2F_3F_4$ valóban paralelogramma, vagy a négy pont egy egyenesre esik. Ezt kellett bizonyítani.