Megoldás. A megoldás során elég annyit feltenni, hogy f egy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett pozitív függvény; a korlátosság feltétele elhagyható. Indirekt bizonyítva föltesszük, hogy

$$\frac{(x_2-x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)} \le \frac{f(0)}{4} \tag{i}$$

teljesül minden x_1 és x_2 számra. (A továbbiakban mindig $x, x_1, x_2 \in [0,1]$ és $x_2 \ge x_1$.) Ebből belátjuk, hogy

(ii) minden n pozitív egész számhoz van olyan c_n pozitív konstans, hogy minden x-re $f(x) \ge c_n x^n f(0)$.

Ehhez átrendezzük (i)-et (pozitív számokkal szorzunk):

$$4(x_2-x_1)f^2(x_1) \le f(x_2)f(0); \tag{iii}$$

$x_1 = 0$-t behelyettesítve: $f(x_2)f(0) \ge 4x_2 f^2(0)$, azaz $f(x_2) \ge 4x_2 f(0)$ minden x_2-re. Ezzel meg is kaptuk az első c_n értéket: $c_1 = 4$.

Tegyük fel, hogy kaptunk már egy pozitív c_n értéket, amely minden x-re teljesíti az $f(x) \ge c_n x^n f(0)$ egyenlőtlenséget. Ekkor (iii)-at felírva, majd x_1-re alkalmazva az előbbi egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$f(x_2)f(0) \ge 4(x_2-x_1)f^2(x_1) \ge 4(x_2-x_1)c_n^2 x_1^{2n} f^2(0).$$

Osztva $f(0)>0$-val és $x_1 = \dfrac{2nx_2}{2n+1}$ -et beírva:

$$f(x_2) \ge 4(x_2-x_1)c_n^2 x_1^{2n} f(0) = 4c_n^2 f(0) \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot x_2^{2n+1}.$$

Ezek szerint a

$$c_{2n+1} = 4 \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot c_n^2$$

kielégíti (ii)-t.

Végül a k-ra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$c_{2^k-1} = \frac{2^{k\cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}}.$$

Valóban, ez teljesül, ha $k=1$, és ha egy adott k-ra igaz, akkor az előbbiek szerint

$$c_{2^{k+1}-1} = c_{2(2^k-1)+1} = 4 \cdot \frac{\big(2(2^k-1)\big)^{2(2^k-1)}}{\big(2(2^k-1)+1\big)^{2(2^k-1)+1}} \cdot c_{2^k-1}^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{2^{k+1}-2} \cdot \frac{(2^k-1)^{2(2^k-1)}}{(2^{k+1}-1)^{2^{k+1}-1}} \cdot \frac{\big(2^{k\cdot 2^k}\big)^2}{\big((2^k-1)^{2^k-1}\big)^2} = \frac{2^{(k+1)2^{k+1}}}{(2^{k+1}-1)^{2^{k+1}-1}},$$

tehát teljesül $(k+1)$-re is.

Így minden pozitív egész k-ra és minden $x \in [0,1]$-re igaz, hogy

$$f(x) \ge c_{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) = \frac{2^{k\cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}} x^{2^k-1} f(0) =$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{2^k}{2^k-1}\right)^{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) \ge 2^k x^{2^k-1} f(0).$$

Speciálisan, $x=1$-re:

$$f(1) \ge 2^k f(0),$$

minden pozitív egész k esetén. Mivel $f(0)$ pozitív, ez ellentmondás.